Corso di Fisica Moderna

Liceo G. Vico- Napoli

A.S. 2009-2010

~ Numeri complessi-onde elettromagnetiche – interferenza nell'esperimento della doppia fenditura-principio d'indeterminazione ~

Argomento complementare all'unità didattica 3° del corso

Prof. Giuseppe Caputo

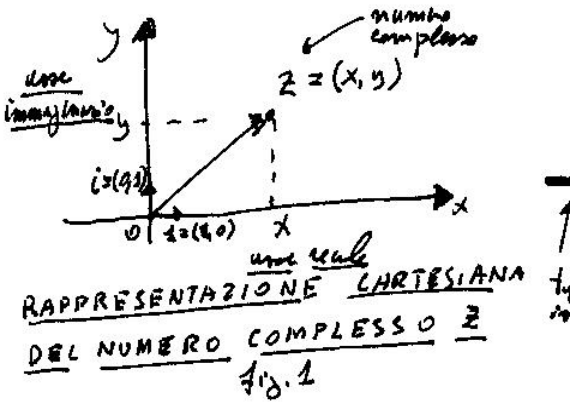
caputogiuseppe@fastwebnet.it

-*"Ogni errore è dovuto a fattori esterni (come le emozioni e l'educazione); la ragione, in sé, non sbaglia" - Kurt Godel*

In queste note voglio riassumere in modo sintetico gli elementi matematici elementari necessari alla comprensione dei fenomeni d'interferenza che si presentano nella fisica quantistica e che sono alla base dei suoi postulati. L'esistenza nel campo reale R (+,·) di polinomi a coefficienti reali irriducibili, ossia non scomponibili nel prodotto di polinomi di grado inferiore, come ad esempio il polinomio di 2° grado x^2+1, conduce naturalmente all' ampliamento del campo C (+,·) mediante il campo complesso C(+, ·).

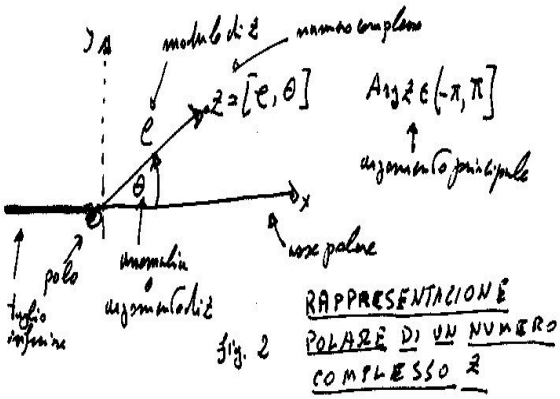
A partire dall'equazione x^2+1=0 non avente radici reali, si definisce come soluzione di questa il numero immaginario **i** di C tale che $i^2 = -1$. Un numero complesso z=x+iy , $x, y \epsilon$ R si presenta algebricamente in modo formale come la somma di una parte reale x = *Re z* e un'immaginaria iy = *Im z,* per cui se y= 0 ci ritroviamo i numeri reali, mentre se x = 0, otteniamo gli immaginari puri.

Si dice che due numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ sono uguali , e scriviamo $z_1 = z_2$, se e solo se per definizione $x_1 = x_2$,$y_1 = y_2$, conducendo ciò a identificare un numero complesso z con un punto del piano cartesiano di coordinate (x, y). Per cui $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1,y_1)$=$(x_2,y_2)$. Il piano così introdotto prende



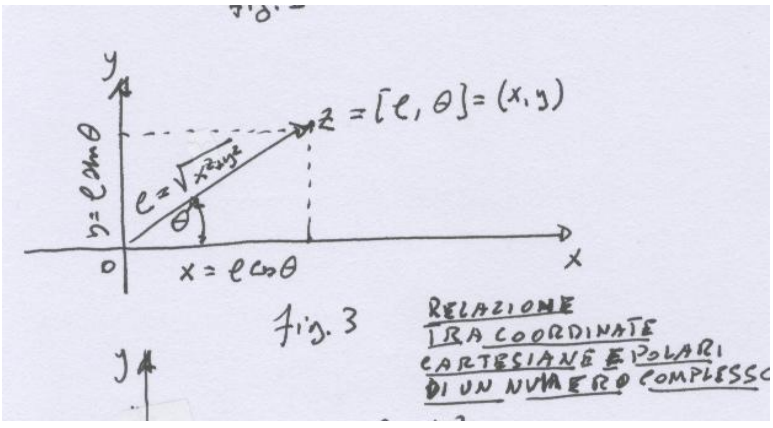
il nome di piano complesso o di Gauss. Poiché una coppia ordinata di numeri reali è univocamente individuata da un vettore applicato nell'origine O del riferimento

cartesiano e cima nel punto associato alla coppia, accanto alla rappresentazione cartesiana di un numero complesso, si può introdurre la rappresentazione polare, considerando come polo l'origine del riferimento

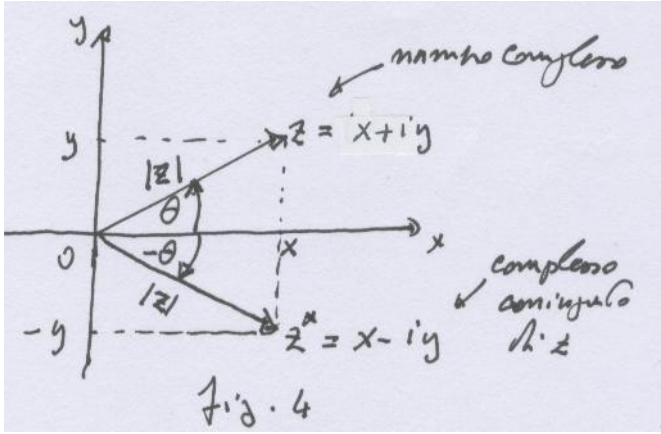


cartesiano e asse polare l'asse orientato x, quindi definendo l'argomento di z come l'insieme di tutte le possibili determinazioni $\arg z = \theta + 2k\pi, k \in Z$ dell'angolo orientato θ = Arg z, dove $-\pi < Arg\, z \leq \pi$ prende il nome di argomento principale del numero complesso z. Allora, avendosi $\arg z = Arg\, z + 2k\pi \Leftrightarrow \arg z - Arg\, z = 2k\pi \Leftrightarrow \arg z \equiv Arg\, z\ (mod\ 2\pi)$, segue che i possibili argomenti di z costituiscono una classe completa di equivalenza modulo 2π. Però differentemente dalla rappresentazione cartesiana, quella polare non è biunivoca in quanto per ogni fissato numero complesso z, arg z è definito a meno di multipli di 2π, inoltre il polo O ha argomento indefinito.

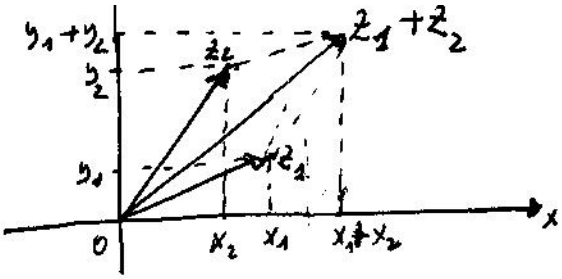
Dalla trigonometria si ricava facilmente la relazione tra le coordinate cartesiane e polari di un numero complesso z: $\left\{\begin{matrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow z = [\rho, \theta] = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, dove il numero reale $\rho = |z|$ è il modulo del numero complesso z. Si definisce complesso coniugato del numero complesso z il numero



complesso $z^* = x - iy = [\rho, -\theta]$



avente nella rappresentazione cartesiana uguale parte reale e coefficiente dell'immaginario opposto a quello di z, mentre in quella polare lo stesso modulo ma argomento opposto. Poiché i numeri complessi sono equivalenti ai vettori del piano cartesiano di origine O, sommare o sottrarre due numeri complessi z_1 e z_2 equivale a sommare o sottrarre i vettori che li rappresentano usando le consuete regole del calcolo vettoriale (vedi fig.5) e osservando che nella somma la componente secondo gli assi x e y del vettore somma e uguale alla somma delle componenti dei vettori di cui facciamo la somma e analogamente per la differenza. Per definizione allora si ha



SOMMA DI DUE NUMERI COMPLESSI
fig. 5

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ e si può verificare geometricamente la disuguaglianza triangolare $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ e che $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$.

Nel campo complesso sono rispettate tutte le proprietà algebriche del campo reale rispetto alle operazioni di somma e prodotto di numeri complessi, dove il prodotto è definito come
$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
da cui segue che $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$. L'elemento neutro della somma è il numero complesso 0 =0 + 0i e l'elemento neutro del prodotto è il numero complesso 1 = 1+ 0i, la cui rappresentazione polare è [1,0]. L'opposto di un numero complesso z è il numero complesso – z = -x – i y, dove la differenza tra due numeri complessi è definita dalla somma del primo con l'opposto del secondo mediante $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Si definisce reciproco di un numero complesso z, il numero complesso $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{z^*}{|z|}$, dove $|z|^2 = z.z^* = x^2 + y^2$ è il modulo quadrato (norma) del numero complesso z , che è nullo se e solo se z = 0. Si definisce quoziente o rapporto di due numeri complessi z_1 e z_2 il numero complesso $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$, cioè il prodotto di uno per il reciproco dell'altro. Bisogna notare però che il campo

complesso non è ordinato. Infatti, se volessimo trasferire a C l'ordinamento stretto < di R avremmo, considerati due numeri complessi z_1 e z_2 che per $z_1 < z_2$
$\Rightarrow i^2 z_1 < i^2 z_2 \Rightarrow -z_1 < -z_2 \Rightarrow (z_1 + z_2) - z_1 < (z_1 + z_2) - z_2 \Rightarrow z_2 < z_1$, palesemente assurdo.

Per introdurre la rappresentazione esponenziale di un numero complesso, seguiremo un procedimento di tipo euristico invece delle consuete dimostrazioni che presuppongonoi una vasta cultura matematica, essendo l'unico prerequisito la conoscenza delle derivate di una funzione di variabile reale.

Supposto quindi di poter derivare nel campo complesso similmente a come si fa nel campo reale, un'equazione differenziale è un'equazione in cui compaiono le derivate di una funzione incognita f(x) della variabile reale x. Come soluzione di una equazione differenziale si ha sempre una famiglia di funzioni f(x) al variare di determinate costanti (integrale generale dell'equazione differenziale), e, se l'equazione è del primo ordine comparendo la sola derivata prima della f(x), al variare di una costante arbitraria reale c si ottengono tutte le soluzioni dell'equazione (integrali particolari; risulta ovvio che in questo contesto non posso parlare né d'integrali singolari, visto il carattere semplicistico della trattazione, né esporre in modo rigoroso tali argomenti). Riferendoci quindi a un'equazione del primo ordine, Il teorema di Cauchy di esistenza e unicità delle equazioni differenziali afferma che per ogni determinato punto del piano di assegnate coordinate (condizione iniziale) passa una e una sola curva del piano o integrale particolare dell'integrale generale relativo a un determinato valore della costante c. Considerata allora l'equazione differenziale del primo ordine in forma normale a coefficienti costanti complessi, omogenea (il termine noto è nullo)

$f(x)' = i\, f(x)$, possiamo notare che il suo integrale generale è $F(x,c) = ce^{ix}$ in quanto derivando si ha $F'(x,c) = ice^{ix} = iF(x,c)$. Ora tra le infinite curve del piano (integrali particolari) che si ottengono al variare di c, vi deve essere per quanto prima detto una sola curva della famiglia soddisfacente la condizione iniziale f(0)=1, e poiché $f(0) = ce^{i0} = c$, si ricava che c = 1, donde l'unica curva del piano passante per il punto (0,1) è f(x) = e^{ix}. Considerata però, la funzione $g(x) = \cos x + i \sin x$, derivando si trova che $g'(x) = -\sin x + i \cos x = i^2 \sin x + i \cos x = i(\cos x + i \sin x) = ig(x)$, per cui anch'essa è soluzione dell'equazione differenziale, soddisfacente la condizione iniziale g(0) =1 poiché g(0) = $\cos 0 + i \sin 0 = 1$.

In base al teorema di Cauchy concludiamo allora che le due funzioni f(x) e g(x) devono coincidere, da cui si ricava l'identità $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, la quale per x = θ prende il nome formula di Eulero – De Moivre $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$. Poiché abbiamo visto che un numero complesso di modulo unitario $|z|$=1ha la forma trigonometrica $z = \cos\theta + i \sin\theta$, segue $z = e^{i\theta}$ e in generale essendo $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$, segue la forma esponenziale (euleriana) di un numero complesso $z = |z|e^{i\theta}$.

Dimostriamo ora alcune proprietà dei numeri complessi utili per gli argomenti che seguiranno.

Una prima è la forma esponenziale di un numero complesso :
$z^* = (\rho e^{i\theta})^* = (\rho(\cos\theta + i \sin\theta))^* = \rho \cos\theta - i\rho \sin\theta = \rho \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \rho e^{-i\theta}$.

Una seconda proprietà consiste nel fatto che il coniugato della somma di due numeri complessi è uguale alla somma dei coniugati dei due numeri, avendosi

$$(z_1 + z_2)^* = \left(\rho_1 e^{i\theta_1} + \rho_2 e^{i\theta_2}\right)^* = \left(\rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right)^* =$$

$$\rho_1\cos\theta_1 + \rho_2\cos\theta_2 - i(\rho_1\sin\theta_1 + \rho_2\sin\theta_2) = \rho_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1) + \rho_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) =$$

$$= \rho_1(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1)) + \rho_2(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)) = \rho_1 e^{-i\theta_1} + \rho_2 e^{-i\theta_2} = z_1^* + z_2^*$$

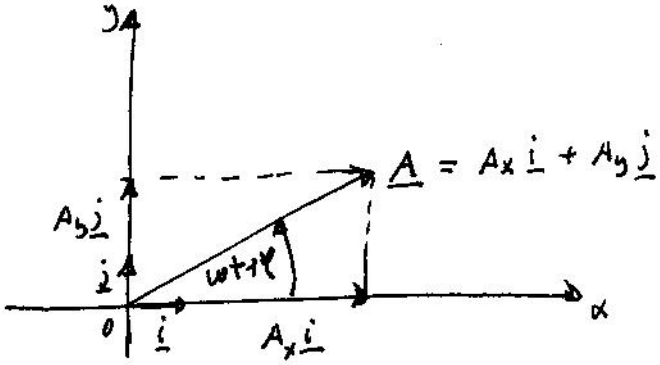
Valgono inoltre le seguenti formule di Eulero

$$\left(\begin{array}{l} \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \\ \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta \end{array}\right)$$

che si provano facilmente sostituendo agli esponenziali le relative espressioni trigonometriche. Dalla prima in particolare si ricava $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$, la quale ci sarà utile tra breve.

Quando consideriamo l'equazione di un'onda (armonica) in funzione del tempo
y(t) = A $\cos(\omega t + \varphi)$, dove $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ è la velocità angolare del moto armonico, T è il periodo, ν la frequenza, φ la fase, possiamo considerare tale equazione come il modulo della componente secondo l'asse x del vettore del piano xOy **A** = A_x**i** +A_y**j** **,** dove **i**, **j** sono i versori degli assi (vettori di modulo unitario e direzione e verso secondo la direzione e l'orientamento degli assi tali che per i prodotti scalari valgano le relazioni **i•i =** cos 0= 1, **j•j =** cos 0= 1, **i•j = j•i =** cos 90°= 0), con il modulo delle componenti uguali rispettivamente a A_x = **A•i** = A $\cos(\omega t + \varphi)$, A_y = **A•j** = A $\sin(\omega t + \varphi)$

fig. 6



Il vettore **A** = **A**(t) è una funzione vettoriale della variabile t che ruota attorno all'origine al variare di t. E' lecito perciò identificare tale vettore rotante con il numero complesso (usiamo l'accento per distinguere i numeri complessi da quelli reali) $\hat{A} = A_x + iA_y$ = A $\cos(\omega t + \varphi)$ + i A $\sin(\omega t + \varphi)$ = A $(\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi))$ = A$e^{i(\omega t + \varphi)}$ = $(Ae^{i\varphi})e^{i\omega t} = \hat{h}e^{i\omega t}$, dove $\hat{h}$ **= A** $e^{i\varphi}$prende il nome di **<u>ampiezza</u> dell'onda**, mentre la parte reale di $\hat{A}$, $Re(\hat{A}) = Re(\hat{h}e^{i\omega t}) = A(\cos(\omega t + \varphi)) = A_x$ si dice **<u>altezza</u> dell'onda**.

Si definisce invece **<u>intensità</u> dell'onda** un numero reale I direttamente proporzionale al modulo quadrato dell'ampiezza dell'onda, che, per semplicità di calcolo, supporremo uguale a quest'ultimo ponendo $\boldsymbol{I = |\hat{h}|^2 = \hat{h} \cdot (\hat{h})^*}$.

Per comprendere a livello matematico l'interferenza nell'esperienza di Young della doppia fenditura, pensiamo alle onde luminose provenienti dai fori 1 e 2 come emesse da due sorgenti luminose S_1 ed S_2 coerenti (cioè aventi uguale lunghezza d'onda λ e quindi uguale pulsazione ω) aventi rispettivamente equazioni $\hat{A}_1 = \hat{h}_1\, e^{i\omega t} = (A_1\, e^{i\varphi_1})e^{i\omega t}$ e $\hat{A}_2 = \hat{h}_2\, e^{i\omega t} = (A_2\, e^{i\varphi_2})e^{i\omega t}$, dove φ_1 e φ_2 rappresentano le rispettive fasi.

Ora sommiamo le due onde sommando i rispettivi numeri complessi, ottenendo l'onda risultante di equazione:

$$\hat{A}_{12} = (A_1\, e^{i\varphi_1})e^{i\omega t} + (A_2\, e^{i\varphi_2})e^{i\omega t} = (A_1\, e^{i\varphi_1} + A_2\, e^{i\varphi_2})e^{i\omega t}$$

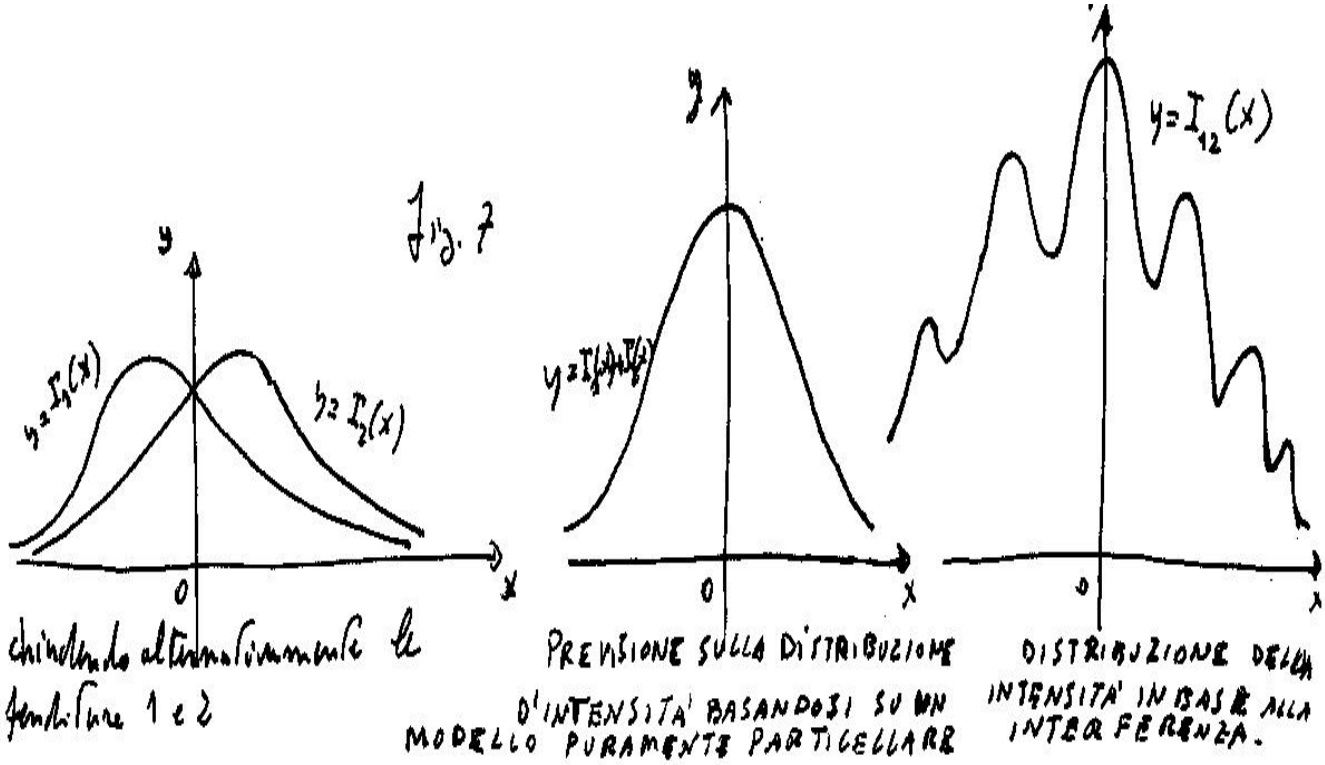
Il cui modulo quadrato è, utilizzando la formula di Eulero di pag.5,

$$|\hat{\mathbf{A}}_{12}|^2 = |A_1\, e^{i\varphi_1} + A_2\, e^{i\varphi_2}|^2 |e^{i\omega t}|^2 = [(A_1\, e^{i\varphi_1} + A_2\, e^{i\varphi_2})(A_1\, e^{i\varphi_1} + A_2\, e^{i\varphi_2})^*][(e^{i\omega t})(e^{i\omega t})^*] =$$
$$(A_1\, e^{i\varphi_1} + A_2\, e^{i\varphi_2})(A_1\, e^{-i\varphi_1} + A_2\, e^{-i\varphi_2})(e^{i\omega t} e^{-i\omega t}) =$$
$$(A_1^2 e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_1} + A_1 e^{i\varphi_1} A_2 e^{-i\varphi_2} + A_1 e^{-i\varphi_1} A_2 e^{i\varphi_2} + A_2^2\, e^{i\varphi_2} e^{-i\varphi_2}) e^{i\omega t - i\omega t} =$$
$$A_1^2 + A_1 A_2\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + A_1 A_2\, e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + A_2^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \left(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}\right) =$$
$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \Rightarrow |\hat{\mathbf{A}}_{12}|^2 = \boldsymbol{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

dalla quale relazione , poiché l'intensità dell'onda è $I = |\hat{A}|^2$, si ricava la fondamentale relazione d'interferenza

$$\boldsymbol{I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_2 I_2} \cos\delta}$$, con $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$, differenza di fasi tra le sorgenti,

che appunto indica come l'intensità dell'onda risultante è uguale alla somma delle intensità delle onde componenti più il <u>termine complementare d'interferenza</u> $\boldsymbol{2\sqrt{I_2 I_2} \cos\delta = I_{12} - (I_1 + I_2)}$ che rappresenta la differenza tra ciò che avviene (ovvero $I_{12} figura\ a\ destra$) e quello che ci saremmo aspettati (cioè $I_1 + I_2\ fig.centrale$).



Sempre dal grafico dell'interferenza a destra si vede che, quando le onde sono in fase nel colpire un punto x dello schermo, avendosi ciò quando la differenza delle distanze dalle due fenditure 1 e 2 è uguale a un numero intero di lunghezze d'onda, i picchi delle onde si sommano dando luogo a un'interferenza costruttiva I_{12} di grande intensità, poiché in questo caso si ha $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi, k \in Z \Rightarrow \cos\delta = 1$ e I_{12} è maggiore della somma $I_1 + I_2$ data dal grafico centrale della figura, in quanto a questa quantità bisogna sommare il termine complementare $2\sqrt{I_2 I_2}$. Invece se le onde arrivano nel punto x con una differenza di fase di π, ossia $\delta = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi + 2k\pi, k \in Z \Rightarrow \cos\delta = -1$, e ciò si ha quando la differenza delle distanze dalle fenditure 1 e 2 è uguale a un multiplo intero della lunghezza d'onda più mezza lunghezza d'onda, l'intensità dell'onda risultante I_{12} risulta minore, essendo la differenza delle ampiezze delle onde provenienti dalle fenditure 1 e 2. In questo caso avremo un'interferenza distruttiva.

Comunque si ha interferenza costruttiva se $I_{12} \geq I_1 + I_2 \Leftrightarrow \delta \in \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]$, interferenza distruttiva se $I_{12} \leq I_1 + I_2 \Leftrightarrow \delta \in [\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi]$.

Ora, sia che si tratta di fotoni emessi dalla sorgente luminosa S e passanti attraverso le fenditure 1 e 2, sia si tratta di elettroni (in questo caso la sorgente è costituita da un involucro metallico con un foro attraverso il quale passano gli elettroni e a cui si applica una tensione positiva in modo da attrarre questi ultimi; all'interno dell'involucro c'è un filo sottile di tungsteno cui si applica una tensione negativa, che, opportunamente riscaldato, emette elettroni per effetto termoionico), ciò che viene rilevato dallo schermo sono granuli di particelle che si comportano in modo incomprensibile se sono considerate nel senso letterale del termine. Infatti, osservando i grafici, vi sono punti dello schermo nei quali, se si tengono aperti contemporaneamente i fori 1 e 2, arrivano pochi fotoni, mentre se uno dei due fori viene chiuso, arrivano

molti più fotoni provenienti dall'altro, inoltre al centro l'intensità I_{12} è maggiore del doppio di $I_1 + I_2$, come se la chiusura di un foro diminuisca il numero di fotoni che escono dall'altro foro.

Durante i nostri incontri pomeridiani abbiamo visto un filmato nel quale, in un apparecchio a forma di parallelepipedo schermato della lunghezza di 2.5 m, veniva introdotto un fascio di luce collimato in una doppia fenditura mobile, provocando figure d'interferenza su di uno schermo sul fondo dell'apparecchio.

Sempre nel filmato, una sorgente luminosa provoca per effetto fotoelettrico una corrente in entrata di $10^{-15}A$. Tale corrente è amplificata di un fattore di 10^6 da un fotomoltiplicatore producendo in uscita una corrente di $10^{-9}A$.

Poiché la carica dell'elettrone è $e = 1.6 \times 10^{-19}C \Rightarrow 1C = 10^{19}/1.6$ e $= 625 \times 10^{16}$e , allora $1A = \frac{1C}{1s} = 625 \times 10^{16}$e/s (elettroni al secondo), per cui in entrata vi é una corrente di $10^{-15}A = 10^{-15} \times 625 \times 10^{16}$e/s =6250 e/s$\cong 10^4 e/s$. Ora, poiché ci vogliono in media 10^3 fotoni per estrarre un elettrone, per ottenere $10^4 e/s$ ci vogliono $10^3 \times 10^4 = 10^7$fot/s, cioè, all'entrata del dispositivo, dalla sorgente luminosa, arrivano in 1s circa 10^7fotoni, per cui nel tempo di $10^{-7}s$ arriva un solo fotone. All'entrata del dispositivo si presenta quindi un solo fotone ogni $10^{-7}s$, per cui quando arriva un secondo fotone, il primo ha percorso nel dispositivo uno spazio uguale a $d = ct = 3 \times 10^8$ m/s$\times 10^{-7}s$ =30 m. Allora, essendo il dispositivo lungo 2.5 m, il primo fotone ha già raggiunto lo schermo in fondo al dispositivo e quindi nell'apparecchio c'è un solo fotone alla volta. Questo prova che l'interferenza non è dovuta all'interazione tra fotoni, ma a una caratteristica intrinseca dello stesso fotone. Nelle parole di Paul Dirac: "ogni fotone interferisce solo con se stesso".

I fotoni quindi, oltre ad essere particelle di massa nulla e quantità di moto $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$, dove h =$6.626 \times 10^{-34}$Js è la costante di Planck, c $= 3 \times 10^8 m/s$ la velocità della luce e ν la frequenza della radiazione, viaggianti alla velocità della luce, presentano proprietà ondulatorie (dalla relatività ristretta si ha l'energia relativistica E =$\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$, per cui essendo nulla la massa del fotone, risulta E = cp $\Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$) . <u>L'onda elettromagnetica determina in qualche modo la probabilità della comparsa di un fotone nel senso che dove il campo dell'onda è intenso, c'è molta probabilità di trovare fotoni.</u>

Se indichiamo con $P_1(x)$ la distribuzione di probabilità di trovare un fotone sullo schermo in un determinato punto x di questo nel caso in cui è aperto solo il foro 1, $P_2(x)$ la distribuzione di probabilità nel caso in cui è aperto solo il foro 2 e $P_{12}(x)$ quella quando entrambi i fori sono aperti, le curve relative alle probabilità sono le stesse delle intensità delle onde indicate nella fig. 7. Ne possiamo dedurre che, se pur i fotoni arrivano a granuli come particelle, <u>la probabilità di rilevarli sullo schermo varia con la distribuzione d'intensità propria delle onde.</u>

Poiché abbiamo definito l'intensità di un'onda come la media nel tempo del quadrato dell'ampiezza dell'onda $I = |\hat{h}|^2 = |Ae^{i\varphi}|^2$, usando i numeri complessi per semplificare a livello matematico l'analisi del

fenomeno fisico, è naturale porre la probabilità $P(x)$ come uguale a P = $|\widehat{\emptyset}|^2$,dove $\widehat{\emptyset} = \widehat{\emptyset}(x)$ è una funzione complessa della variabile reale x detta <u>ampiezza di probabilità</u> tale che

$$P_1 = |\widehat{\emptyset_1}|^2, P_2 = |\widehat{\emptyset_2}|^2 \Rightarrow P_{12} = |\widehat{\emptyset_1} + \widehat{\emptyset_2}|^2 \neq |\widehat{\emptyset_1}|^2 + |\widehat{\emptyset_2}|^2 = P_1 + P_2.$$

In meccanica quantistica le ampiezze di probabilità $\widehat{\emptyset} = \widehat{\emptyset}(x)$ devono necessariamente essere rappresentate da numeri complessi, poiché le sole parti reali sono insufficienti per formulare leggi matematiche dei fenomeni. Definito allora come esperimento ideale quello in cui vi è assenza d'influenze esterne imprecisate (come ad esempio vibrazione, ecc.), significando ciò che tutte le condizioni iniziali e finali sono completamente specificate definendo completamente tutti i possibili eventi, <u>i principi base della meccanica quantistica</u> si possono riassumere in:

1. La probabilità P di un evento in un esperimento ideale è data dal quadrato di un numero complesso $\emptyset$ detto <u>ampiezza di probabilità</u>, cioè P = $|\widehat{\emptyset}|^2$.
2. Quando un evento può avvenire secondo varie alternative, l'ampiezza di probabilità dell'evento è la somma delle ampiezze di probabilità delle varie alternative considerate separatamente, per cui **si ha interferenza** avendosi **:** $\emptyset = \emptyset_1 + \emptyset_2$, P = $|\widehat{\emptyset_1} + \widehat{\emptyset_2}|^2$.
3. Se si effettua un esperimento capace di determinare se una o l'altra delle possibili alternative si è effettivamente realizzata, la probabilità dell'evento è la somma delle probabilità di ciascuna delle alternative; **non avendosi quindi interferenza** si ha P = $P_1 + P_2$.

Il lettore noti come nella fisica quantistica si considerano solo le probabilità degli eventi, essendo impossibile prevedere ciò che può accadere in una determinata situazione.

Al contrario, la visione deterministica del mondo della fisica classica si può riassumere con l'idea, nota come il demone di Laplace (Pierre Simon de Laplace 1749- 1827, matematico francese) secondo la quale una mente sufficientemente intelligente, in grado di conoscere in un determinato istante la posizione e la quantità di moto $\vec{p} = m\vec{v}$ di ogni singola particella dell'Universo, potrebbe calcolare, grazie alle leggi di Newton, tutti gli eventi del passato, del presente e del futuro, implicando ciò il concetto che al momento della sua creazione l'Universo era completamente determinato.

All'età di ventisei anni nel 1927, il geniale fisico tedesco Werner Heisenberg (1901-1976) formulò il <u>principio d'indeterminazione</u> nel quale è posto in relazione il grado di precisione Δx con il quale si può conoscere la posizione di un oggetto quantistico e l'incertezza che affigge la sua quantità di moto Δp.

Il principio si riassume nella disuguaglianza $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$, dove $\hbar = \frac{h}{2\pi} \cong 1.055 \times 10^{-34}$Js è la costante di Planck ridotta (leggi h tagliato).

Se una particella si muove lungo una retta, non è possibile misurare con precisione assoluta la sua posizione x e la sua quantità di moto p, significando ciò che la particella si trova da qualche parte all'interno dell'intervallo Δx e possiede una quantità di moto il cui valore è compreso entro l'intervallo Δp.

Per calcolare la traiettoria esatta della particella nel senso deterministico del demone di Laplace, dovremmo poter minimizzare i valori Δx e Δp, ma ciò è vietato dalla relazione d'indeterminazione $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ perché diminuire il valore di Δx porta automaticamente ad aumentare il valore di Δp, in quanto il prodotto $\Delta x \Delta p$ deve inevitabilmente valere almeno quanto la costante di Planck ridotta $\hbar$.

Quindi tra i valori Δx e Δp sussiste una relazione di complementarietà e il principio d'indeterminazione limita a priori la nostra conoscenza delle traiettorie esatte degli oggetti quantistici, e ciò indipendentemente dalla precisione delle misure, essendo una proprietà intrinseca della materia su scale atomiche dell'ordine di 10^{-10}m (circa il diametro di un atomo). Il principio d'indeterminazione è in grado di spiegare gli effetti di deviazione ai bordi delle fenditure nell'esperienza di Young con gli elettroni, senza ricorrere al modello ondulatorio. Un elettrone, in prossimità di una fenditura stretta sufficientemente, deve necessariamente avere una traiettoria precisa e trovarsi in un punto ben determinato tra le pareti della fenditura, per cui la quantità Δx deve essere molto piccola e di conseguenza la quantità Δp, che rappresenta l'incertezza della sua quantità di moto, deve essere molto grande rispetto a Δx, donde il vettore $\overrightarrow{\Delta p} = m\overrightarrow{\Delta v}$, avendo una direzione estremamente indeterminata, al di là della fessura ha una direzione non prevedibile a priori. Quindi il modello corpuscolare ampliato con il principio d'indeterminazione, spiega gli effetti di deviazione ai bordi della fenditura e le conseguenti strisce d'interferenza. Per chiarire meglio, dobbiamo dire in quale modo si stabilisce la traiettoria di un elettrone.

Possiamo stabilirla "guardando" il moto dell'elettrone, cioè inviando una radiazione elettromagnetica su i possibili luoghi di passaggio, che nel nostro caso sono le due fenditure, quindi collocando dei sensori che registrano sotto quale angolo la radiazione viene eventualmente deviata oppure riflessa dagli elettroni. E' importante però che, affinché vi sia una "risoluzione delle immagini" sufficiente, la radiazione sia ad alta frequenza e piccola lunghezza d'onda. Essendo le fenditure molto vicine tra loro, siamo costretti a usare le cortissime onde dei raggi X per ottenere dati di rilievo. Nel momento però che usiamo i raggi X per guadagnare informazione, su quale delle due fenditure l'elettrone ha attraversato, la figura d'interferenza scompare e si ritrova al suo posto la distribuzione di probabilità data dalla semplice somma delle distribuzioni corrispondenti a ciascuna fenditura prese singolarmente, in accordo al 3°principio della meccanica quantistica a pag.8.

Analogamente a quanto accade nell'effetto Compton, una radiazione elettromagnetica di alta frequenza per "vedere"gli elettroni, comporta un'alta frequenza dei fotoni della radiazione e quindi una grande quantità di moto del fotone $p_{fot} = \frac{h\nu}{c}$, che, "urtando"un elettrone, trasferisce una notevole parte della sua quantità di moto all'elettrone che così viene perturbato, avendo come risultato la scomparsa delle frange d'interferenza sullo schermo. Se invece rifacciamo l'esperimento con una radiazione elettromagnetica di bassa frequenza, la figura d'interferenza non scompare, ma perdiamo la possibilità di stabilire la traiettoria degli elettroni giacché ne perdiamo in definizione. Infatti i fotoni della radiazione cedono una quantità insignificante della loro quantità di moto agli elettroni, i quali possono costruire la figura d'interferenza non essendo perturbati dall'azione dei fotoni.

Applicando il principio d'indeterminazione, si può dire che, a causa del valore piccolo della quantità di moto Δp dell'elettrone, sappiamo che esso arriverà su una striscia scura la cui posizione è calcolabile in anticipo, ma nello stesso tempo però non sappiamo più quale delle due fenditure ha attraversato, per cui Δx, al contrario di Δp, è molto grande. In quest'ottica si ha che l'esperienza della doppia fenditura con gli elettroni fornisce una conferma sperimentale della relazione d'indeterminazione di Heisenberg.

In modo scherzoso si può dire che gli elettroni si "vergognano"del loro carattere ondulatorio perché, se non li guardiamo, si comportano come onde, ma non appena cerchiamo di osservarli, si comportano come particelle, per cui se la strada scelta da un elettrone è sconosciuta, allora otteniamo una figura d'interferenza, invece se riusciamo ad avere informazione su quale strada l'elettrone ha preso, allora la figura d'interferenza viene distrutta; cioè le due cose sono complementari. Bisogna però dire che recenti esperimenti hanno messo in dubbio il principio d'indeterminazione, in quanto ad esempio nell'esperienza della doppia fenditura, la perdita della figura d'interferenza possa essere legata maggiormente a una correlazione quantistica tra i sensori che permetterebbe di avere informazioni sul moto degli elettroni. Questo potrebbe implicare una relazione più profonda del principio d'indeterminazione nel dualismo quantistico onda -particella.

L'esperimento della doppia fenditura è stato ripetuto anche con particelle di massa maggiore degli elettroni, come i neutroni ad esempio, producendo sempre interferenza. A questo punto è interessante chiedersi quale sia il punto nella scala delle grandezze in cui le particelle perdono la capacità d'interferenza, in pratica qual è il confine tra il macrocosmo e il microcosmo. Fino ad ora ci siamo tormentati con l'interrogativo sulla natura "schizofrenica" dell'elettrone che in certi casi si comporta come una particella e in altri come un'onda, per cui è naturale chiedersi quale delle due cose sia, una particella, un'onda o tutte e due le cose insieme. Tale aspetto paradossale può essere risolto riportando le parole di R. Feynman, il quale a una precisa domanda a riguardo, rispose: "non è nessuno dei due". Quindi l'errore sta nello scegliere tra l'uno o l'altro, mentre un oggetto quantistico ha una natura che a noi non può essere svelata; cerchiamo di descrivere gli oggetti quantistici estrapolando e applicando a essi modelli tratti dal mondo reale macroscopico, peccando di presunzione nel fare tale descrizione, seppur approssimativa del problema. Le particelle del microcosmo, cioè dell'ordine di grandezza di 10^{-10}m, non hanno un paragone nel macrocosmo, diciamo nell'ordine di grandezza di 10^{-1}m. Concludiamo quindi affermando che l'elettrone è semplicemente un oggetto quantistico avente i comportamenti descritti nelle esperienze che abbiamo considerato fino ad ora.

Esiste anche una seconda formulazione del principio d'indeterminazione che contrappone l'incertezza sul tempo Δt della durata di una misurazione su un oggetto quantistico, all'incertezza della misurazione dell'energia dell'oggetto stesso nella relazione $\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$, per cui più breve è la durata Δt della misura, più impreciso è il valore trovato dell'energia e viceversa. In questa formulazione risulta che energia e tempo sono complementari tra loro, per cui una precisa misurazione di una delle due grandezze rende imprecisa la misura dell'altra, ovvero il prodotto degli errori $\Delta E \Delta t$ sulla misura di energia e tempo ha le medesime proprietà del prodotto $\Delta x \Delta p$ della coppia posizione della particella, quantità di moto di essa. Questo fatto non deve stupire perché, se in un determinato esperimento interessa sapere in quale istante t avviene un certo evento, per cui si cerca di ridurre al minimo l'errore d'indeterminazione, ciò lo si deve fare a scapito della misura E dell'energia, cioè avendo nel frattempo un grande errore di misura ΔE. Il motivo di ciò è

dovuto al fatto che, valendo l'equazione $E = h\nu$, non si ha una stima precisa della frequenza ν poiché non è possibile misurare oscillazioni complete. Voglio chiarire questo concetto. Per misurare la frequenza ν, si devono contare le oscillazioni in un determinato intervallo di tempo e, per fare ciò, bisogna che si verifichi almeno un'oscillazione completa nel tempo T di un periodo, per la qual cosa c'è sempre un limite ineliminabile con cui si può conoscere la frequenza di un oggetto quantistico perché, nel misurare solo una parte dell'oscillazione in un tempo Δt più piccolo del periodo, il valore della frequenza e quindi dell'energia risulta indeterminato. Ne consegue che una determinazione esatta del valore energetico di una particella implica un campionamento piuttosto lungo dell'onda, per cui, se la vita media di una particella è limitata, allora la sua energia è indefinita.

Per interpretazione di Copenaghen della meccanica quantistica si deve fare riferimento ai lavori del 1927 di W. Heisenberg c e N.Bohr, frutto della loro collaborazione a Copenaghen appunto, riguardo il principio di complementarietà, la dualità onda-corpuscolo. Se ci riferiamo all'esperimento della doppia fenditura, la meccanica quantistica stabilisce solo in modo probabilistico il punto in cui ogni particella colpirà lo schermo; nelle zone chiare la probabilità è alta, nelle zone scure è bassa. La meccanica quantistica non è in grado di prevedere esattamente dove la particella (fotone, elettrone, ecc.) colpirà lo schermo, per cui si potrebbe ipotizzare l'esistenza di qualche "variabile nascosta", la quale, limitando la nostra conoscenza, ci porta a fare le asserzioni della meccanica quantistica la quale come abbiamo detto, sostiene che i risultati delle misurazioni di variabili coniugate non sono deterministici nel senso che, anche conoscendo tutti i dati iniziali, è impossibile conoscere a priori il risultato, poiché è l'esperimento stesso che influenza il risultato!

La teoria studia esclusivamente quantità osservabili, ottenibili attraverso processi di misurazione, i quali causano il collasso della funzione d'onda, imponendole di assumere casual mente uno stato consentito. Cerchiamo di chiarire, perché quello che ho appena detto significa che riferendoci ad esempio a un elettrone nell'esperienza della doppia fenditura, misurare la sua posizione produce la perdita della sua capacità d'interferenza ovvero della sua proprietà di onda, riducendo gli stati probabilistici nel senso del crollo della sovrapposizione di questi molteplici possibili stati in cui l'elettrone si trovava prima della misura della sua posizione. Dopo che si è compiuta una misura della posizione dell'elettrone, quest'ultimo continua a mantenere solo lo stato corpuscolare e tale è rilevato sullo schermo Se guardiamo più da vicino lo schermo colpito dagli elettroni, possiamo osservare che le strisce d'interferenza non sono continue e uniformi come sarebbe ipotizzabile in un modello in cui si rappresentasse l'elettrone solo come un'onda continua, bensì presentano una struttura granulosa causata dall'impatto di singole particelle.

Quest'osservazione comporta la posizione notevole che all'interno di uno stesso esperimento, in parallelo, devono essere usati i due modelli ondulatorio e corpuscolare per spiegare il fenomeno in oggetto, i quali sappiamo a livello macroscopico si contraddicono. Il problema è ora di capire come fa l'elettrone a perdere le sue caratteristiche di onda di probabilità P(x) e a divenire sullo schermo una particella. Usando il modello ondulatorio, l'elettrone, attraversata la fenditura, si propaga come un'onda sferica tridimensionale in modo isotropo, cioè in tutte le direzioni uniformemente. La figura d'interferenza che si produce sullo schermo è dovuta alla sovrapposizione delle due onde sferiche che si propagano alle spalle di ciascuna delle due fenditure. L'elettrone così descritto non è localizzato esattamente, ma si trova con probabilità diverse relativamente ad ogni punto dello spazio. Il fatto cruciale che non ha senso chiedersi dove esattamente si trovi perché, se per assurdo conoscessimo esattamente la sua posizione, esso perderebbe la sua proprietà di onda probabilistica e quindi la sua capacità d'interferire. Allora la nostra indagine per vedere come

un'onda diviene una particella morirebbe sul nascere. Quindi l'elettrone è descritto in modo de localizzato attraverso la funzione d'onda. Ora, come nel filmato dell'esperienza con i fotoni, c'è un solo elettrone alla volta nell'apparecchio e, alle spalle della doppia fenditura, in prossimità dello schermo, vi sono due onde sferiche che interferiscono tra loro e l'elettrone lo dovete pensare distribuito sull'intera onda risultante, anzi è esso stesso l'onda. Poiché sullo schermo vengono rilevati sempre singoli elettroni interi, quest'onda-elettrone deve collassare in un ben determinato punto x dello schermo ed è questo il collasso della funzione d'onda, che rappresenta il passaggio dal modello ondulatorio al modello corpuscolare. La parte dell'onda-elettrone estesa nello spazio che non si trova nel punto x dallo schermo dove viene rilevato l'elettrone-particella scompare istantaneamente e si materializza nell'elettrone-particella. Nasce però così un altro problema. L'elettrone-onda è materia che si propaga nello spazio secondo una determinata funzione d'onda matematica, ma come fa in un istante a collassare tutta in un punto senza alcun ritardo temporale? Questa istantanea trasmissione d'informazione non contrasta forse con la relatività ristretta in cui si assume che la velocità della luce è la massima possibile nell'universo? Einstein rifiutò questa "fantomatica azione a distanza"formulando un famoso esperimento concettuale insieme ai più giovani colleghi Podolsky e Rosen conosciuto come paradosso EPR, di cui spero, ci occuperemo prossimamente. Ma la soluzione del problema qual è allora? La soluzione del problema è che dobbiamo guardare a esso esclusivamente da un punto di vista più matematico e meno fisico. Per Max Born la funzione d'onda di un oggetto quantistico è la misura della probabilità che l'oggetto si trovi in un punto stabilito, quindi non si deve pensare a essa come un'onda reale che si propaga nello spazio allo scorrere del tempo, bensì a una costruzione matematica utile per il calcolo della probabilità di trovare l'oggetto quantistico in un determinato posto dello spazio. Quindi, sia nel caso del fotone-onda che dell'elettrone-onda, si tratta solo di onde di probabilità che si propagano in uno spazio matematico astratto denominato "spazio delle configurazioni"e non di onde materiali che si propagano nello spazio reale. Ciò spiega l'annichilimento istantaneo dell'onda ma non spiega le modalità con cui ciò avviene. E' questo un punto controverso sin dai tempi di Einstein e Bohr ed a tutt'oggi dibattuto. Ci occuperemo in seguito delle varie teorie esistenti, la più vecchia delle quali è l'interpretazione di Copenaghen o scuola di Copenaghen dove fu elaborata da Bohr e il suo giovane assistente W.Heisenberg. Siamo giunti quindi al punto da cui siamo partiti. Nell'esperienza della doppia fenditura, secondo questa interpretazione, è il processo di misurazione che fa collassare l'onda probabilistica! Infatti, nell'interazione tra l'elettrone (o il fotone) e lo schermo, la sovrapposizione dei diversi stati dell'elettrone, nel senso della sua simultanea presenza negli infiniti luoghi dell'elettrone -onda, va irrimediabilmente perduta . La causa risiede proprio nell'interazione tra un oggetto quantistico ed uno grossolano e l'onda implode. Riporto le parole di Heisenberg:"La funzione di probabilità, diversamente dalla struttura matematica della meccanica newtoniana, non descrive un evento determinato, bensì, almeno per quanto riguarda i processi di osservazione, un complesso di possibili eventi. L'osservazione stessa cambia in modo discontinuo la funzione di probabilità. Essa seleziona, tra tutti i possibili processi, quello che si è effettivamente realizzato".Secondo la scuola di Copenaghen quindi, il processo di misurazione sceglie tra tutti i possibili processi, cioè tra tutti i possibili stati di sovrapposizione dell'oggetto quantistico, quello che alla fine sarà osservato. E' importante notare che quindi secondo Bohr l'onda di probabilità non descrive lo stato dell'oggetto quantistico in sé, ma fornisce solo la probabilità che, nel corso di una misurazione, il suddetto oggetto quantistico si trovi in un certo stato. Ritornando quindi all'esperimento della doppia fenditura, la perdita della capacità d'interferenza degli elettroni era dovuta al semplice fatto di aver ottenuto (con i raggi X) informazioni su quale strada essi avevano preso determinandone la posizione e quindi riducendone gli stati probabilistici preesistenti, riducendo il pacchetto d'onda. A misurazione

avvenuta, l'elettrone possiede solo uno stato ben definito e localizzato, quello corpuscolare che gli permette d'interagire con lo schermo come una particella classica.

Voglio terminare riassumendo nelle parole di Einstein il suo scetticismo sulla meccanica quantistica, la quale, di fatto, cancellava il determinismo della fisica classica. Una volta parlando con Bohr disse: "Dio non gioca a dadi con l'universo", al che Bohr rispose"Smettila di dire a Dio cosa deve fare!".Tempo dopo Feyenman replicò: "Non solo Dio gioca a dadi, ma li lancia dove non possiamo vederli!!", riassumendo il tutto nell'interpretazione di ordine zero della meccanica quantistica: " Zitto e calcola!!! "In piena modestia voglio aggiungere l a lapidaria frase con cui Wittgenstein termina il suo Tractatus "Su ciò di cui non si può parlare, si deve tacere".

P.S. A questo mio articolo bisogna aggiungere degli esercizi da me sviluppati e che spero di svolgere a lezione, i quali cominciano da pag.21 degli appunti manoscritti in fotocopia. Inoltre, da pag. 25 negli appunti stessi, ho sviluppato una riflessione di tipo filosofico sul principio d'indeterminazione legandolo al noumeno kantiano. L'alunno interessato non dovrebbe tralasciare però in generale l'aspetto storico-filosofico in cui si è sviluppata la meccanica quantistica, riferendosi in speciale modo al positivismo logico del circolo di Vienna, alle figure di Moritz Schlick e di Wittgenstein e soprattutto al teorema d'incompletezza di Kurt Gödel (consiglio vivamente a riguardo il libro Di Rebecca Goldstein "Incompletezza"ed. Codice per una visione storico-filosofica d'insieme, i l libro "6 pezzi facili di R. Feyenman ed. Adelphi, il libro "Fisica ed oltre" di W. Heisenberg, ed. Bollati Boringhieri).

Prof. Giuseppe Caputo

<u>Problema</u>

Un carrellino di massa m = 200g si muove con un sistema a cuscino d'aria con una velocità di 0.5 m/s.

La quantità di moto del carrellino viene misurata con l'incertezza dell'1‰.

Calcolare, mediante la relazione d'indeterminazione di Heisenberg, la minima incertezza sulla posizione del carrellino.