Interpolazione ed estrapolazione razionale intera

Prof. Giuseppe Caputo

◆∗◆∗◆∗◆∗◆

Nel 2° problema dell'Esame di Stato Liceo Scientifico corso di ordinamento 2011, compare un classico problema d'interpolazione in ambito finanziario. I miei alunni già hanno incontrato un problema simile a proposito della determinazione di una legge fisica a partire da dati sperimentali, per cui mi ero convinto a scrivere qualcosa a riguardo, ma ora, alla luce di quanto detto prima, tale intenzione diviene una necessità. Come al solito, dopo le necessarie premesse teoriche, seguiranno delle applicazioni tra cui la risoluzione del quesito di maturità.

◆∗◆∗◆

Cominciamo considerando un intervallo [a,b] chiuso e limitato dell'asse reale x e n + 1 punti distinti $x_k \ (k = 0 \cdot \cdots \cdot n)$ in esso, $x_0, x_1, \cdots, x_n$, disposti in ordine crescente. Sia quindi una funzione reale di variabile reale $f: x \in [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to y = f(x) \in \mathbb{R}$ continua in [a,b] di cui si conoscono solo i valori $f(x_0) = f_0, f(x_1) = f_1, \cdots, f(x_k) = f_k, \cdots, f(x_n) = f_n$ nei punti x_k.

Per calcolare valori di $f(x)$ per punti $x \neq x_k$ di $\mathbb{R}$, si costruisce un polinomio $P_n(x)$ di grado n assumente i valori noti $P_n(x_k) = f(x_k)$ ed approssimante la funzione f(x), ovvero tale che $P_n(x) \cong f(x), \forall\, x \in [a,b]$.

Si ha: $\begin{cases} x \in (x_0, x_n)\ interpolazione\ razionale\ intera \\ x \notin (x_0, x_n)\ extrapolazione\ razionale\ intera \end{cases}$. In tutti i due casi, si conviene di parlare d'interpolazione razionale intera.

Nel caso $n = 0$ si ha un sol punto x_0 nel quale si conosce il valore della funzione $f(x_0) = f_0$, per cui posto $P_0(x) = f_0$, avendosi $f(x) \cong P_0(x)$, la funzione f(x) è approssimata dalla funzione costante $P_0(x) = f_0\ , \forall\, x \in [a,b]$.

In genere però $n > 0$ e si ha:
$n = 1, interpolazione\ lineare$
$n = 2, interpolazione\ quadratica$
$n = 3, interpolazione\ cubica, ecc\ \ldots$

Costruzione del polinomio interpolante nel caso $\mathbf{n} > 0$

Per ogni fissato valore di $k = 0, \cdots, n$, in corrispondenza a ciascun punto x_k tra gli n + 1 punti campione assegnati, consideriamo Il polinomio moltiplicatore di Lagrange di grado n $L_{nk}(x)$ così definito: $L_{nk}: x \in \mathbb{R} \to L_{nk}(x) \in \mathbb{R}$, negli n + 1 punti $x_0, x_1, \cdots, x_n$ di $[a,b]$

$L_{nk}(x) = \begin{cases} 1, & x = x_k \\ 0, x \neq x_k \Rightarrow x \in \{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1,\cdots,} x_n\} \end{cases}$, cioè quel polinomio che assume il valore 1 nel determinato punto di campionatura x_ke 0 negli altri punti $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1,}, \cdots, x_n$ distinti da x_k, da definire in base a tali premesse negli altri punti $x \in [a,b]$ distinti da $x_0, x_1, \cdots, x_n$.

Tale polinomio, avendo n radici reali, in base al teorema di Ruffini deve avere come unica scomposizione in n polinomi di 1° grado la seguente:

$L_{nk}(x) = a_k(x-x_0)(x-x_1)\cdot\cdots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x-x_n)$, dove, poiché

$$L_{nk}(x_k) = 1 \Rightarrow 1 = a_k(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\cdots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x_k-x_n),$$

si ha l'espressione del coefficiente a_k in funzione dei punti di campionatura

$$a_k = \frac{1}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\cdots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x_k-x_n)}$$

donde l'espressione del polinomio moltiplicatore di Lagrange $L_{nk}(x), \forall k = 0, \dots, n$, univocamente determinato noti gli n punti $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1,\cdots,}x_n$, definito $\forall x \in \mathbb{R}$

$$L_{nk}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\cdots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\cdots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}$$

Ora, i termini $f_kL_{nk}(x)$, ottenuti al variare di k moltiplicando i polinomi $L_{nk}(x)$ per ii valori noti$f_k = f(x_k)$, sono polinomi di grado n tali che $\begin{cases} f_kL_{nk}(x_i) = f_k, i = k \\ f_kL_{nk}(x_i) = 0, i \neq k \end{cases}, i = 0, \cdots, n.$

Ne consegue che anche la somma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_kL_{nk}(x) = f_0L_{n0}(x) + \cdots + f_nL_{nn}(x)$$

essendo un polinomio di grado n tale che assume i valori prefissati $P_n(x_0) = f_0, \cdots, P_n(x_n) = f_n$, risulta essere una curva del piano cartesiano Oxy che passa per i punti $(x_{0,}, f_0), \cdots, (x_{n,}, f_n)$.

Si ha quindi la formula di Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdot\cdots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\cdots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x_k-x_n)}$$

Che si può sinteticamente scrivere

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)}}$$

noti i poli $(x_{0,}, f_0), \cdots, (x_{n,}, f_n)$.

Osserviamo che $P_n(x)$ è univocamente determinato in quanto i polinomi di grado non superiore ad n a primo e secondo membro si annullano per gli n + 1 valori , $x_0, x_1, \cdots, x_n$, per cui in base al principio d'identità dei polinomi sono identici, cioè l'eguaglianza vale per ogni valore di x nell'intervallo (a, b) (in caso contrario la loro differenza sarebbe un polinomio al più di grado n a coefficienti non tutti nulli che si annullerebbe per n + 1 valori distinti della x, contro il fatto che un polinomio di grado n ha al più n radici distinte.). Per il principio d'identità allora i polinomi essendo identicamente uguali, sono anche uguali, cioè hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti.

Vediamo un esempio.

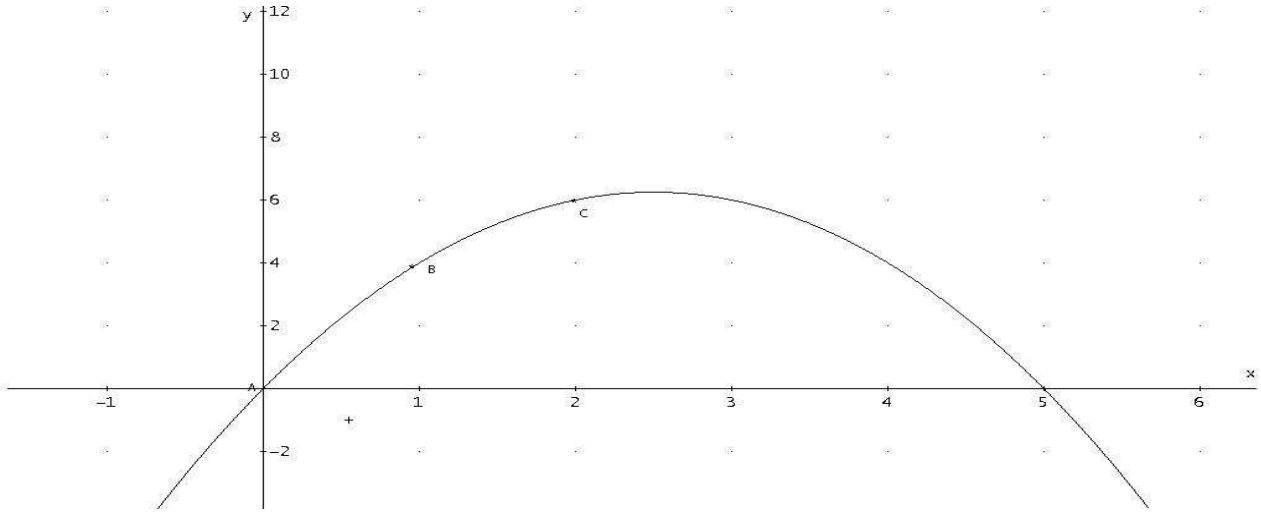
Ci proponiamo di trovare il polinomio i di Lagrange interpolante i punti $\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}(1,4), \mathrm{C}(2,6)$.

Si ha: $n = 2$, $\begin{cases} x_0 = 0,\ x_1 = 1, x_2 = 2 \\ f_0 = 0, f_1 = 4, f_2 = 6 \end{cases}$, $\begin{cases} L_{20}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) \\ L_{21}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0(1-2))} = -x(x-2) \\ L_{22}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}x(x-1) \end{cases}$

Quindi il polinomio di 2° interpolante è

$$P_2(x) = f_0 L_{20}(x) + f_1 L_{21}(x) + f_2 L_{22}(x) = 0 \cdot \frac{1}{2}(x-1)(x-2) - 4x(x-2) + 6 \cdot \frac{1}{2}x(x-1) =$$

$$= -x^2 + 5x$$



All'interpolazione lineare si ricorre ad esempio nel calcolo approssimato dei logaritmi mediante le tavole, nelle quali vi sono i valori approssimati dei logaritmi calcolati ad intervalli costanti di ampiezza d. Vediamo come si opera. Supponendo di conoscere i valori consecutivi $\log a$ e $\log b$ (in base 10 o in base e è lo stesso) sulle tavole di modo che $d = b - a$, posto $x_0 = a, x_1 = b$, sia $x \in (a, b)$ un valore tra a e b di cui vogliamo calcolare il logaritmo. Il polinomio interpolante di 1° grado per i punti $(a, \log a)$, $(b, \log b)$ è $P(x) = \log a + \frac{\log b - \log a}{b-a}(x-a)$, per cui si ha:

$$\log x \cong \log a + \frac{\log b - \log a}{b-a}(x-a).$$

Infatti posto $x_0 = a, x_1 = b, P_1(x_0) = f_0 = \log a, P_1(x_1) = f_1 = \log b$, quindi

$L_{10}(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-b}{a-b}$, $L_{11}(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-a}{b-a}$, si ha

$$P_1(x) = f_0 L_{10}(x) + f_1 L_{11}(x) = \log a \frac{x-b}{a-b} + \log b \frac{x-a}{b-a}$$
$$= \frac{blog\ a - alog\ a + xlogb - a\log b - xlog\ a + a\log a}{b-a}$$
$$= \log a + \frac{\log b - \log a}{b-a}(x-a)$$

Se consideriamo l'approssimazione come un'eguaglianza, si ha la seguente proporzione logaritmica

$$\frac{\log x - \log a}{x-a} = \frac{\log b - \log a}{b-a}$$

Vediamo ora il quesito dell'esame di maturità di cui prima ho detto.

Il profitto di un'azienda in milioni di euro è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto

anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile la funzione g definita su $\mathbb{R}^+$se per ciascun x_i oggetto dell'osservazione, si ha :$|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$.
Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione $\mathrm{f(x)} = (\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}}{3}} + 3$
e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

Costruiamoci il polinomio interpolatore cominciando col notare che n = 6 e i punti da interpolare sono n + 1 = 7, inoltre seguendo la notazione precedente $f_i = y_i$. Si ha:

$\mathrm{f_0L_{60}(x)} = 1.97\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6)}{(0-1)\cdot(0-2)\cdot(0-3)\cdot(0-4)\cdot(0-5)\cdot(0-6)}$
$\mathrm{f_1L_{61}(x)} = \frac{3.02\cdot((\mathrm{x}-0)\cdot(\mathrm{x}-2)\cdot(\mathrm{x}-3)\cdot(\mathrm{x}-4)\cdot(\mathrm{x}-5)\cdot(\mathrm{x}-6))}{(1-0)\cdot(1-2)\cdot(1-3)\cdot(1-4)\cdot(1-5)\cdot(1-6)}$
$\mathrm{f_2L_{62}(x)} = \frac{3.49\cdot((\mathrm{x}-0)\cdot(\mathrm{x}-1)\cdot(\mathrm{x}-3)\cdot(\mathrm{x}-4)\cdot(\mathrm{x}-5)\cdot(\mathrm{x}-6))}{(2-0)\cdot(2-1)\cdot(2-3)\cdot(2-4)\cdot(2-5)\cdot(2-6)}$
$\mathrm{f_3L_{63}(x)} = \frac{3.71\cdot((\mathrm{x}-0)\cdot(\mathrm{x}-1)\cdot(\mathrm{x}-2)\cdot(\mathrm{x}-4)\cdot(\mathrm{x}-5)\cdot(\mathrm{x}-6))}{(3-0)\cdot(3-1)\cdot(3-2)\cdot(3-4)\cdot(3-5)\cdot(3-6)}$
$\mathrm{f_4L_{64}(x)} = \frac{3.8\cdot((\mathrm{x}-0)\cdot(\mathrm{x}-1)\cdot(\mathrm{x}-2)\cdot(\mathrm{x}-3)\cdot(\mathrm{x}-5)\cdot(\mathrm{x}-6))}{(4-0)\cdot(4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-3)\cdot(4-5)\cdot(4-6)}$

$\mathrm{f_5L_{65}(x)} = \dfrac{3.76 \cdot ((\mathrm{x} - 0) \cdot (\mathrm{x} - 1) \cdot (\mathrm{x} - 2) \cdot (\mathrm{x} - 3) \cdot (\mathrm{x} - 4) \cdot (\mathrm{x} - 6))}{(5 - 0) \cdot (5 - 1) \cdot (5 - 2) \cdot (5 - 3) \cdot (5 - 4) \cdot (5 - 6)}$
$\mathrm{f_6L_{66}(x)} = \dfrac{3.65 \cdot ((\mathrm{x} - 0) \cdot (\mathrm{x} - 1) \cdot (\mathrm{x} - 2) \cdot (\mathrm{x} - 3) \cdot (\mathrm{x} - 4) \cdot (\mathrm{x} - 5))}{(6 - 0) \cdot (6 - 1) \cdot (6 - 2) \cdot (6 - 3) \cdot (6 - 4) \cdot (6 - 5)}$

$$P_6(x) = \sum_{k=0}^{6} f_k L_{nk}(x) = f_0 L_{60}(x) + \cdots + f_6 L_{66}(x) =$$

$$= \frac{1}{8000}x^6 - \frac{9}{8000}x^5 - \frac{9}{1600}x^4 + \frac{169}{1600}x^3 - \frac{1109}{2000}x^2 + \frac{3011}{2000}x + \frac{197}{100}$$

Il cui grafico è quello della curva divergente positivamente quando x tende a $+\infty$, mentre il grafico di $\mathrm{f(x)} = (\mathrm{x} - 1)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}}{3}} + 3$ è quello che ha l'asintoto orizzontale a destra di equazione $y = 3$. Come si può vedere nell'intervallo di campionatura $[0,6]$ il polinomio interpolatore approssima "molto bene" la funzione $\mathrm{f(x)}$.
Ci ripromettiamo di spiegare il significato di approssimazione valutando l'errore $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ si che si commette sostituendo alla funzione incognita il polinomio interpolante di Lagrange.

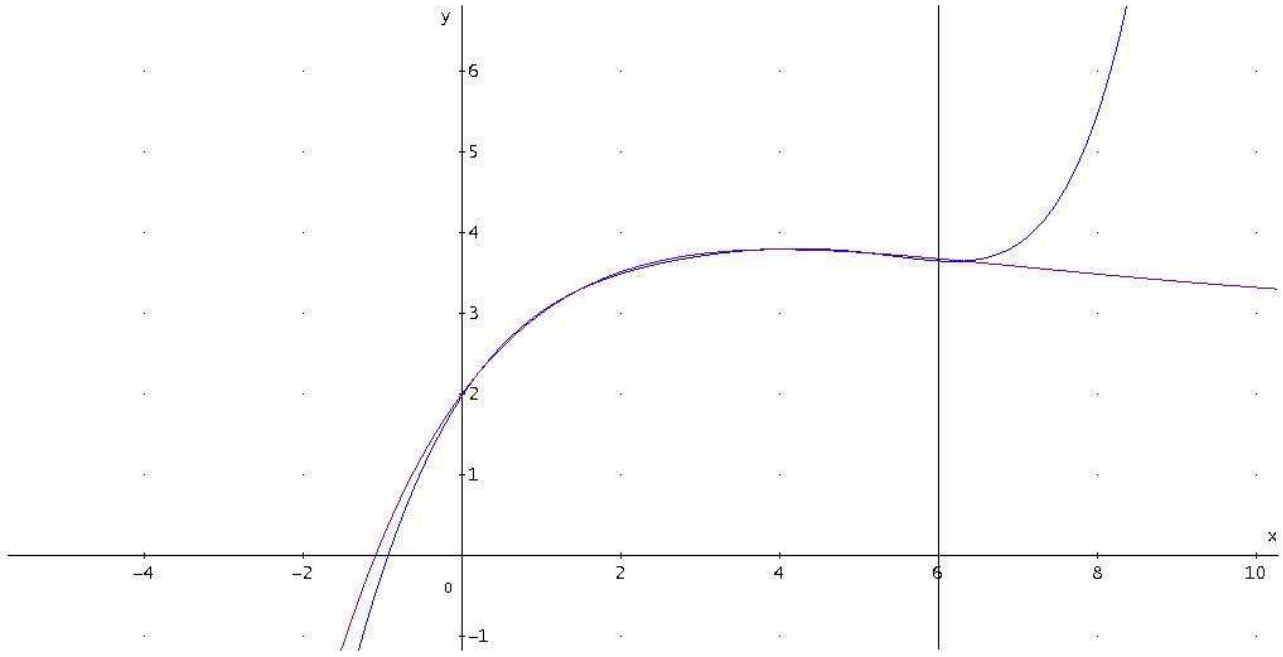


Figura 1

grafico della funzione $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}}$+3 e del suo polinomio interpolante $P_6(x) = g(x)$ nell'intervallo $[0, 6]$

Supposto che la funzione incognita $f(x)$ sia di classe $C^{n+1}[a, b]$, ossia che $f(x)$è una funzione derivabile con continuità n + 1 volte nell'intervallo $[a, b]$ di modo che esistano continue le derivate di $f(x)$ fino all'ordine n + 1, ci proponiamo di dimostrare che, comunque fissato x nell'intervallo (a, b), deve esistere in corrispondenza di tale x almeno un punto $\xi_x$in (a, b), tale che si abbia:

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

,anzi ξ_x è un punto del più piccolo intervallo $\mathcal{I}(\xi_x) \subset (a, b)$ tale che i punti $x, x_0, x_1, \cdots, x_n \in \mathcal{I}(\xi_x)$, ovvero contenente oltre al punto x i punti interpolanti. Supponiamo che $x_n < x < b$.

Posto $R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n) T_n(x)$, segue $T_n(x) = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)}$,

che possiamo scrivere $T_n = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)}$ perché essendo x fissato, tale rapporto è costante.

Consideriamo quindi la funzione ausiliaria della variabile $u \in (a, b)$

$$\mathrm{F(u)} = \mathrm{f(u)} - \mathrm{P_n(u)} - \mathrm{R_n}(u) = \mathrm{f(u)} - \mathrm{P_n(u)} - T_n(u - x_0)(u - x_1) \cdot \cdots \cdot (u - x_n)$$

Tale funzione si annulla agli estremi dell'intervallo $[x_0, x_1]$ in quanto

$$\mathrm{F}(x_0) = \mathrm{f}(x_0) - \mathrm{P_n}(x_0) - T_n(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_0 - x_n) = f_0 - f_0 = 0$$

$$\mathrm{F}(x_1) = \mathrm{f}(x_1) - \mathrm{P_n}(x_1) - T_n(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_1 - x_n) = f_1 - f_1 = 0$$

e quindi, per il teorema di Rolle, deve esistere almeno un punto y_0 interno all'intervallo (x_0, x_1) tale che si annulli la derivata della funzione $F(x)$, cioè si abbia $F'(y_0) = 0$.

Analogamente nell'intervallo $[x_1, x_2]$ la funzione $F(x)$ si annulla agli estremi, avendosi, come già si è visto,

$$\mathrm{F}(x_1) = 0$$
$$\mathrm{F}(x_2) = \mathrm{f}(x_2) - \mathrm{P_n}(x_2) - T_n(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_2) \cdot \cdots \cdot (x_2 - x_n) = f_2 - f_2 = 0$$

per cui deve esistere in base al teorema di Rolle almeno un punto $y_1 \in (x_1, x_2)$ in cui $\mathrm{F'(y_1)} = 0$.

Generalizzando possiamo affermare che in tutti gli intervalli del tipo $[x_h, x_{h+1}]$,

con $h = 0, \ldots, n - 1$, fino all'intervallo $[x_{n-1}, x_n]$ dove si ha $F\left(x_{n-1)}\right) = F(x_n) = 0$ e

$\exists y_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$ / $\mathrm{F'(y_{n-1})} = 0$.

Poiché $F(x) = f(x) - P_n(x) - R_n(x) = R_n(x) - R_n(x) = 0$, si ha che anche nell'intervallo $[x_n, x]$ la funzione $F(u)$ si annulla agli estremi donde per il teorema di Rolle $\exists y_n \in (x_n, x)$ / $\mathrm{F'(y_n)} = 0$.

Riassumendo: agli estremi di ciascuno degli n + 1 intervalli $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n], [x_n, x]$, la funzione ausiliaria $F(u)$ si annulla, per cui per il teorema di Rolle devono esistere internamente ad ognuno degli intervalli rispettivamente almeno n + 1 punti $y_0, y_1, \ldots, \mathrm{y_{n-1}}, \mathrm{y_n}$ in cui si annulla la derivata prima di $F(u)$.

Iteriamo il ragionamento considerando questa volta gli intervalli $[y_0, y_1], [y_1, y_2]$,…,$[y_{n-1}, y_n]$, ai cui estremi $F'(u)$ si annulla. Per il teorema di Rolle applicato questa volta alla derivata prima $F'(u)$ della funzione $F(u)$, esisteranno almeno n punti $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ internamente a ciascuno di tali intervalli in cui si annulla la derivata seconda $F''(u)$.

Ragionando similmente in n passi si arriva a provare che esiste almeno un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $F^{n+1}(\xi) = 0$.

Posto allora $A(u) = (u - x_0)(u - x_1) \cdot \dots \cdot (u - x_n) = u^{n+1} + \alpha_1 u^n + \alpha_2 u^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} u + \alpha_n$ il polinomio di grado n della variabile u, la sua derivata prima $A'(u)$ è un polinomio di grado n-1, $A''(u)$ un polinomio di grado n-2,…, $A^{(n)}(u)$ un polinomio di 1° grado, $A^{(n+1)}(u)$ una costante che si calcola derivando successivamente n + 1 volte il termine u^{n+1} (derivando n + 1 volte gli altri termini di $A(u)$ si ottiene sempre 0) ottenendo alla fine

$$A^{(n+1)}(u) = (n+1)n((n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = (n+1)!$$

Allora la funzione ausiliaria si può scrivere come:

$$\mathrm{F(u)} = \mathrm{f(u)} - \mathrm{P_n(u)} - \mathrm{R_n}(u) = \mathrm{f(u)} - \mathrm{P_n(u)} - T_n(u - x_0)(u - x_1) \cdot \dots \cdot (u - x_n)$$
$$= \mathrm{f(u)} - \mathrm{P_n(u)} - T_n A(u)$$

Derivando n + 1 volte rispetto ad u si ha:

$$F^{(n+1)}(u) = f^{(n+1)}(u) - P_n^{(n+1)}(u) - T_n A^{(n+1)}(u) = f^{(n+1)}(u) - T_n(n+1)! \Rightarrow$$

$$F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - T_n(n+1).$$

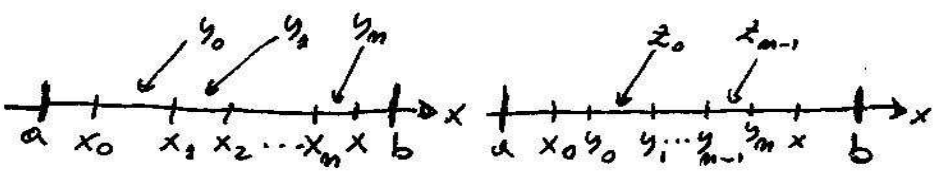
Poiché però si è visto a pag.6 che $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$, consegue che $f^{(n+1)}(\xi_x) - T_n(n+1)! = 0$,

donde $T_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ e <u>la valutazione dell'errore $R_n(x)$ che si commette sostituendo alla funzione incognita $f(x)$ il suo polinomio interpolante $P_n(x)$ di grado n</u>

$$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

Rimane da provare che il punto ξ_x appartiene al più piccolo intervallo che, insieme con il punto x, contiene tutti i punti $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Infatti, per come si sono costruiti gli intervalli



si ha:

$a < x_0 < y_0 < z_0 < \cdots < y_{n-1} < z_{n-1} < \cdots < y_n < x < b$, per cui $[x_0, x]$ è un intervallo contenuto nell'intervallo $[a, b]$ che risulta pure il più piccolo dei possibili intervalli contenuti in $[a, b]$ contenenti i punti $x_0, x_1, \cdots, x_n$.

A questo punto osserviamo che, essendo supposto che $f(x)$ sia derivabile con continuità in (a, b) fino all'ordine n + 1, la derivata $f^{(n+1)}(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$, per cui in base al teorema di Weierstrass sulle funzioni continue in un intervallo, è dotata di estremo superiore M_{n+1}in $[a, b]$, minimo dei maggioranti dei valori di $f^{(n+1)}(x)$ in (a, b). Si ha allora $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M_{n+1}, \forall x \in (a, b)$, da cui si ottiene la maggiorazione dell'errore

$$|R_n(x)| = |(x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)| \cdot \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n),$$

dove $M_{n+1} = \sup_{x \in (a,b)} f^{(n+1)}(x)$.

La formula $\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}$, dove , $\boxed{R_n(x) = f(x) - P_n(x)}$ è molto utile per una stima del numero dei nodi $x_0, x_1, \cdots, x_n$ necessari per ottenere un errore d'interpolazione minore di una data tolleranza massima.

Vale pure la formula 1) $\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}}$

che indica come <u>l'errore d'interpolazione sia proporzionale alla n + 1 - ma potenza dell'intervallo di campionatura.</u>

Infatti , per quanto visto prima, si ha che $\forall x \in (a, b)$, $\exists \xi_x \in (a, b)$ tale che

$R_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$, quindi da $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M_{n+1}, \forall x \in (a, b)$, consegue che in particolare $\left|f^{(n+1)}(\xi_x)\right| \leq M_{n+1}$.

Allora, notato che $\begin{cases} a < x < b \\ a < x_k < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < x < b \\ -b < -x_k < -a \end{cases} \Rightarrow a - b < x - x_k < b - a$, $\forall k \in \{0,1, \ldots, n\}$, si ha:

$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b - a)(b - a) \cdot \cdots \cdot (b - a) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}$.

Osservando la maggiorazione dell'errore espressa dalla formula 1), notiamo che <u>l'errore</u> che si commette con l'approssimazione $f(x) \approx P_n(x)$ <u>è tanto più piccolo quanto minore è l'ampiezza dell'intervallo di campionatura</u> (a, b).

Nel caso $n = 1$ dell'interpolazione lineare , la formula del polinomio interpolante

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_n)}$$

Si particola rizza nel polinomio di 1° grado

$$P_1(x) = f_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = -f_0\frac{x-x_1}{x_1-x_0} + f_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = f_0\frac{x_1-x_0-x+x_0}{x_1-x_0} + f_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$$= f_0\frac{(x_1-x_0)-(x-x_0)}{x_1-x_0} + f_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = f_0 - f_0\frac{(x-x_0)}{x_1-x_0} + f_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = f_0 + (f_1 - f_0)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

La formula $P_1(x) = f_0 + (f_1 - f_0)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$, è quella usata nell'interpolazione lineare di funzioni di cui si posseggono tavole numeriche. La maggiorazione dell'errore è in tal caso $|f(x) - P_1(x)| \le \frac{M_2}{2!}(b-a)^2$.

Nel caso $n = 2$ dell'interpolazione quadratica, supponiamo di scegliere x_1 in modo che sia punto medio dell'intervallo $[x_0, x_2]$ di ampiezza $\delta = x_2 - x_0$, per cui si ha $x_1 = \frac{x_0+x_2}{2} \Rightarrow$

$$x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = \frac{x_0+x_2}{2} - x_0 = \frac{x_2-x_0}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Il polinomio di 2° grado interpolante è allora :

$$P_2(x) = f_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$f_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} - f_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)} + f_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{\frac{\delta}{2}\cdot\delta} - f_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{\frac{\delta}{2}\cdot\frac{\delta}{2}} + f_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{\delta\cdot\frac{\delta}{2}} =$$

$$\frac{2}{\delta^2}[f_0(x-x_1)(x-x_2) - 2f_1(x-x_0)(x-x_2) + f_2(x-x_0)(x-x_1)]$$

la cui maggiorazione dell'errore è $|f(x) - P_2(x)| \le \frac{M_3}{3!}(b-a)^3$.

Nel esempio di pag.3 d'interpolazione quadratica per i punti $A0,0), B(1,4), C(2,6)$ si ha

$\begin{cases} x_0 = 0, f_0 = 0 \\ x_1 = 1, f_1 = 4 \\ x_2 = 2, f_2 = 6 \end{cases}$, quindi x_1=1è punto medio dell'intervallo $[x_0, x_2] = [0,2]$, con $\delta = x_2 - x_0 = 2$.

Concordemente a quanto trovato a pag.4, il polinomio interpolante è:

$P_2(x) = \frac{2}{2^2}[-2\cdot 4(x-0)(x-1) + 6(x-0)(x-1)] = -4x(x-2) + 3x(x-1) = -4x^2 + 8x + 3x^2 - 3x = -x^2 + 5x$, mentre la maggiorazione dell'errore è $|f(x) - P_2(x)| \le \frac{M_3}{3!}\cdot 8 = \frac{4}{3}M_3$.

Ritornando ora al quesito di maturità di pag.5, indichiamo questa volta la funzione g(x) quella che prima abbiamo indicato con f(x), cioè poniamo $g(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$, sapendo che x_i l'anno è di osservazione e y_i il corrispondente profitto

anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

I calcoli delle ordinate della funzione $\mathrm{g(x)}$ sono riassunti nella seguente tabella approssimati alle seconda cifra decimale

anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{g}(x_i)$	2	3	$e^{-\frac{2}{3}}+3 \cong 3{,}513$	$2e^{-1}+3 \cong 3{,}735$	$3e^{-\frac{4}{3}}+3 \cong 3{,}790$	$4e^{-\frac{5}{3}}+3 \cong 3{,}755$	$5e^{-2}+3 \cong 3{,}676$

Le differenze in valore assoluto tra i valori previsti dalla funzione g(x) e i dati reali sono indicati nella seguente tabella:

anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
$\lvert \mathrm{g}(x_i) - y_i \rvert$	0.030	0.020	0.023	0.026	0.009	0.004	0.027

che sono tutti inferiori al decimo. Quindi la funzione $\mathrm{g(x)} = (\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}}{3}}+3$ si può accettare come legge di previsione dei profitti in sei anni. Pensando ora alla possibilità di compiere un'extrapolazione ad esempio nel biennio 2011-2012, si hanno i valori di $\mathrm{g(x)}$ seguenti:

- Per l'anno 2011 si ha $g(7) = 3.58$ milioni di euro
- Per l'anno 2012 si ha $g(8) = 3.49$ milioni di euro

Quindi i profitti sono superiori ai tre milioni di euro.

Però a lungo termine non si può affermare che i profitti siano non inferiori ai tre milioni di euro. Infatti per $x = 20$ (anno 2024(si ha

$g(20) = 19e^{-\frac{20}{3}} \cong 0.024 \Rightarrow |f(20) - y_{20}| \leq 10^{-1} \Rightarrow f(20) - 10^{-1} \leq y_{20} \leq f(20) + 10^{-1} \Rightarrow 2.924 \leq y_{20} \leq 3.124$, cioè il profitto oscilla nell'intervallo d'incertezza $[2.924,3.124]$.

Come si può vedere dal grafico della fig.1 pag.5, i grafici della funzione $\mathrm{g(x)} = (\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}}{3}}+3$ e del polinomio interpolante

$$P_6(x) = \frac{1}{8000}x^6 - \frac{9}{8000}x^5 - \frac{9}{1600}x^4 + \frac{169}{1600}x^3 - \frac{1109}{2000}x^2 + \frac{3011}{2000}x + \frac{197}{100}$$

sono praticamente coincidenti nell' intervallo $[0,6]$, ma differiscono notevolmente al di fuori. Questo fatto è evidenziato dal grafico della funzione differenza in valore assoluto

$h(x) = |P_6(x) - \mathrm{g(x)}|$

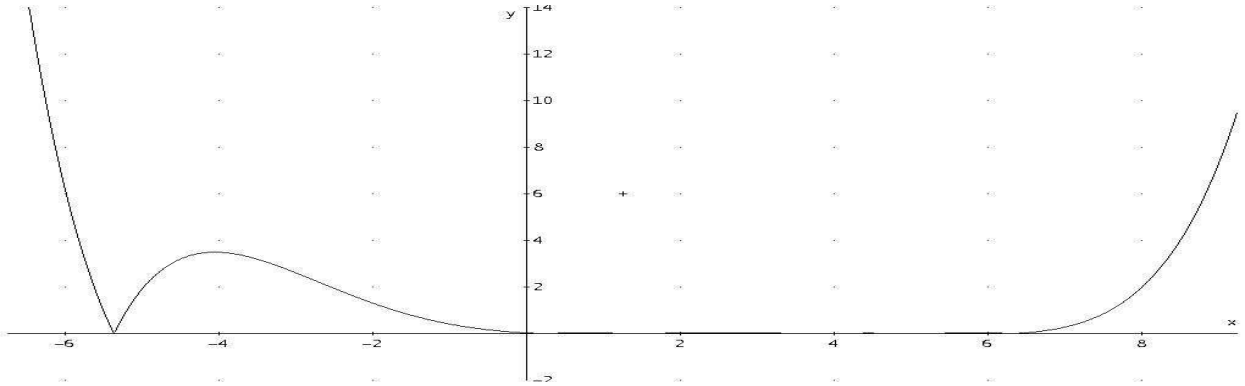


Figura 2

grafico della funzione $h(x) = |P_6(x) - g(x)|$

Poiché $P_6(7) \cong 3.85$ e $P_6(8) \cong 5.47$, confrontando tali valori con quelli della funzione g(x), i quali si è visto essere $g(7) = 3.58$ e $g(8) = 3.49$ si ha una differenza di previsione in percentuale di:

- Per l'anno 2011 del 27%
- Per l'anno 2012 del 198%

Supponendo che la funzione $(x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ rappresenti effettivamente l'andamento dei profitti dell'azienda, ribattezzando di nuovo tale funzione con f(x), cioè ponendo di nuovo $f(x) = (x-1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$, ci chiediamo quale possa essere la maggiorazione dell'errore che si commette sostituendo alla funzione $f(x)$ il suo polinomio interpolante $P_6(x)$ nell' intervallo $[0,6]$.

Dobbiamo ora assumere come valori di ordinata f_k quelli riportati nella seguente tabella:

anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_k	0	1	2	3	4	5	6
$f(x_k) = f_k$	2	3	3,51	3,73	3,79	3,75	3,77

Si ha allora:

$f_0 L_{60}(x) = 2\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6)}{(0-1)\cdot(0-2)\cdot(0-3)\cdot(0-4)\cdot(0-5)\cdot(0-6)}$
$f_1 L_{61}(x) = \frac{3\cdot((x-0)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6))}{(1-0)\cdot(1-2)\cdot(1-3)\cdot(1-4)\cdot(1-5)\cdot(1-6)}$
$f_2 L_{62}(x) = \frac{3.51\cdot((x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6))}{(2-0)\cdot(2-1)\cdot(2-3)\cdot(2-4)\cdot(2-5)\cdot(2-6)}$
$f_3 L_{63}(x) = \frac{3.73\cdot((x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6))}{(3-0)\cdot(3-1)\cdot(3-2)\cdot(3-4)\cdot(3-5)\cdot(3-6)}$
$f_4 L_{64}(x) = \frac{3.79\cdot((x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x-6))}{(4-0)\cdot(4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-3)\cdot(4-5)\cdot(4-6)}$
$f_5 L_{65}(x) = \frac{3.75\cdot((x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-6))}{(5-0)\cdot(5-1)\cdot(5-2)\cdot(5-3)\cdot(5-4)\cdot(5-6)}$
$f_6 L_{66}(x) = \frac{3.77\cdot((x-0)\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5))}{(6-0)\cdot(6-1)\cdot(6-2)\cdot(6-3)\cdot(6-4)\cdot(6-5)}$

Da cui si ricava l'espressione del polinomio interpolante:

$$P_6(x) = \sum_{k=0}^{6} f_k L_{nk}(x) = f_0 L_{60}(x) + \cdots + f_6 L_{66}(x) =$$

$$\frac{17}{72000}x^6 - \frac{17}{4800}x^5 + \frac{247}{14400}x^4 - \frac{11}{4800}x^3 - \frac{5623}{18000}x^2 + \frac{1561}{1200}x + 2$$

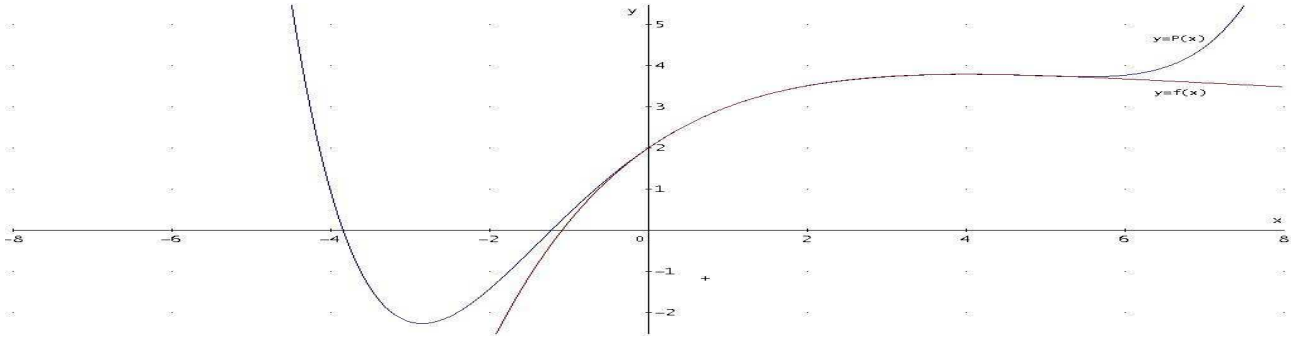


Figura 3

grafico della funzione $f(x) = (\mathbf{x-1})\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}}} + \mathbf{3}$ e dl suo polinomio interpolante $P_6(x)$

Poiché le derivate successive della funzione $y = f(x) = (\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}} + 3$ sono :

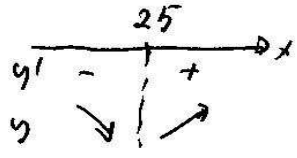
$$y' = e^{-\frac{x}{3}}\frac{4-x}{3}, \mathrm{y}'' = e^{-\frac{x}{3}}\frac{x-7}{9}, \mathrm{y}''' = e^{-\frac{x}{3}}\frac{10-x}{27}, \mathrm{y}^{(4)} = e^{-\frac{x}{3}}\frac{x-13}{81}, \mathrm{y}^{(5)} = e^{-\frac{x}{3}}\frac{16-x}{243},$$

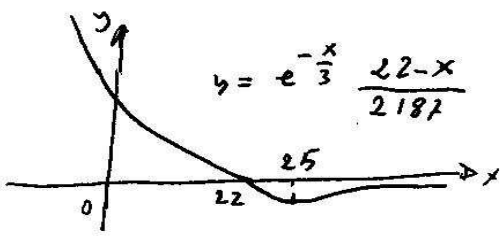
$$\mathrm{y}^{(6)} = e^{-\frac{x}{3}}\frac{x-19}{729}, y^{(7)} = e^{-\frac{x}{3}}\frac{22-x}{2187}$$

La funzione

$f^{(7)}(x) = e^{-\frac{x}{3}}\frac{22-x}{2187} = \frac{1}{2187}\frac{22-x}{e^{\frac{x}{3}}}$ è infinitesima per x divergente positivamente in quanto

$\lim_{x\to+\infty} \frac{22-x}{e^{\frac{x}{3}}} = 0$, inoltre poiché $f^{(8)}(x) = e^{-\frac{x}{3}}\frac{x-25}{6561}$, la funzione presenta il minimo assoluto per x = 25 il cui valore di ordinata è circa $-3.3 \cdot 10^{-7}$, per cui , essendo strettamente decrescente nell'intervallo $[0,6]$, il suo valore minimo è assunto per x = 0 e vale approssimativamente 10^{-2}





Applicando allora la formula 1. Di pag.8 si ha:

$$|R_6(x)| \leq M_7 \cdot \frac{6^7}{7!} \cong \frac{1}{100} \cdot \frac{1944}{35} = \frac{486}{875} \cong 0.55$$