# *Le problematiche dell'Infinito*

*Dedico questo articolo alla memoria del mio professore di Algebra Gianfranco Panella (Roma, 25 maggio 1929 - Roma, 10 settembre 1993) dal quale molto appresi e al quale sarò per sempre debitore.*

*Prof. Giuseppe Caputo*

"*Mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true". Bertrand Russell*

*"Je le vois, mais je ne le crois pas"* da una lettera di Georg Cantor a Dedekind del 29 giugno 1877.

Voglio iniziare quest'articolo riguardante la teoria degli insiemi con una frase di Lucio lombardo Radice di cui il prof. Panella fu assistente: "*Se avessi pensato (se pensassi) che la matematica è solo tecnica e non anche cultura generale; solo calcolo e non anche filosofia, cioè pensiero valido per tutti, non avrei fatto il matematico (non continuerei a farlo)"*

Un insieme S si dice <u>finito</u> se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i suoi elementi e l'n-pla di numeri naturali $\{1,2,\cdots,n\}$, con $n \in \mathbb{N}$, in pratica se possiamo contare i suoi elementi.

Un insieme S è <u>infinito</u> se non è finito.

Quando consideriamo insiemi infiniti, ciò che ha effettivamente importanza non è il conteggio effettivo degli elementi uno dopo l'altro, che non avrà mai termine, bensì la modalità del processo stesso del contare.

Orbene, dati due insiemi S e T finiti o infiniti, si dice che S ha la <u>stessa potenza</u> o <u>cardinalità</u> di T e si scrive $|S| = |T|$, se esiste almeno un'applicazione biiettiva $f: S \to T$ dell'insieme S nell'insieme T.

In tal caso, essendo biiettiva anche l'applicazione inversa $f^{-1}: T \to S$ , si ha pure che T e S hanno la stessa potenza, ovvero $|T| = |S|$, donde la relazione di equipotenza è simmetrica. Allora, osservato che l'identità di S $i: S \to S$ è biiettiva, da cui si ricava $|S| = |S|$,ossia la relazione è riflessiva, e che, essendo la composizione di due applicazioni biiettive un' applicazione biiettiva, per cui vale la proprietà transitiva $|S| = |T|, |T| = |U| \Rightarrow |S| = |U|$, si potrebbe pensare che la relazione di equipotenza è una relazione di equivalenza definita nell'insieme di tutti gli insiemi. Ma ciò non è operativamente possibile perché si genererebbero delle antinomie, come Bertrand Russell ha ampiamente provato.

Nel caso che tra S e T c'è solo un'applicazione iniettiva ma non suriettiva, quindi non biiettiva, si dice che la <u>potenza di S è minore della potenza di T</u> e si scrive $|S| < |T|$.

Si definisce <u>insieme delle parti</u> di un insieme S, l'insieme P(S) costituito da tutti i sottoinsiemi dell'insieme S. Chiaramente tra i sottoinsiemi di S c'è sempre l'insieme vuoto $\emptyset$ ed S stesso.

Dalla lettera già citata a Dedekind, per giunta in francese, cosa inusuale, Cantor aveva scoperto sorprendentemente che oggetti appartenenti a dimensioni differenti, come un segmento o un quadrato hanno lo stesso numero infinito di punti. Senza entrare per ora nel merito di questi ed altri risultati, Cantor aveva dimostrato, già negli anni settanta del XIX secolo, che il più piccolo tipo d'infinito, cioè il più piccolo numero transfinito era quello del numerabile, cioè l'infinito dei numeri naturali, indicato da lui con la prima lettera dell'alfabeto ebraico, l'aleph $\aleph$, con un pedice zero, ossia il simbolo $\aleph_0$, e che, dato un qualsiasi insieme infinito S, esiste sempre un insieme avente un ordine d'infinito più grande: l'insieme delle sue parti.

Si può però subito vedere che l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$, che contiene come sua parte propria l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, ha la stessa potenza di $\mathbb{N}$, in quanto l'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$ definita da $f: n \in \mathbb{N} \rightarrow \begin{Bmatrix} \mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathrm{P} \\ -\mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathrm{D} \end{Bmatrix} \in \mathbb{Z}$, dove P è l'insieme dei numeri pari e D è l'insieme dei numeri dispari, risulta biiettiva. Questo per gli insiemi finiti è impossibile. Anche i numeri razionali $\mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità $\aleph_0$, come provò Cantor disponendo tutte le frazioni in una tabella bi-dimensionale, quindi definendo per diagonalizzazione un'applicazione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$, nel modo seguente:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \cdots \end{array}$$

Più avanti daremo un' altra dimostrazione di tale proprietà dei numeri razionali.

In questo articolo voglio sottoporvi la dimostrazione del matematico tedesco (benché nato a San Pietroburgo il 3 marzo del 1845 da padre danese di fede protestante e madre Maria Bohm, cattolica, parente di Joseph Bohm fondatore e direttore del conservatorio di Vienna; comunque la famiglia aveva origine ebraica e si trasferì a Fracoforte nel 1856. Molti membri della famiglia avevano un notevole talento musicale).

A premessa bisogna dire che nella dimostrazione è applicato il principio aristotelico del "tertium non datur", Molti matematici, tra cui Kronecher rifiutavano il concetto di infinito attuale, ammettendo solo l'infinito potenziale e il matematico olandese Brower, appartenente alla corrente degli intuizionisti, riteneva che tale principio si potesse applicare solo a insiemi finiti ( gli intuizionisti ammettevano solo l'intuizione primitiva della numerazione come base della costruzione d'insiemi). Vediamo quindi il teorema di Cantor che presenta un'interessante tecnica dimostrativa, un vero esercizio di logica.

<u>Teorema</u>: Se S è un insieme e P(S) l'insieme delle sue parti, allora $|S| < |P(S)|$.

<u>Dimostrazione</u>:

La dimostrazione è ovvia se S è un insieme finito di $n \in \mathbb{N}$ elementi. Infatti in tal caso il numero di tutti i possibili sottoinsiemi di S è dato dalla somma delle combinazioni semplici di n elementi di S

presi a gruppi di 0 a 0 elementi (ciò ci dà l'insieme vuoto ∅), a 1 a 1, a 2 a 2,…, a n a n ( ciò ci dà l'insieme stesso S), ossia
$C_{n,0}, C_{n,1}, C_{n,2}, \dots, C_{n,n} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$,
applicando la formula del binomio di Newton. Allora da $n < 2^n$, segue $|S| < |P(S)|$. Si osservi che tale proprietà si può dimostrare anche per induzione completa, ma in questa sede mi astengo dal farlo.

Se invece S è infinito, consideriamo $\forall x \in S$ l'applicazione iniettiva tra S e P(S) che ad ogni elemento associa il suo singleton (insieme costituito dal solo elemento stesso) $x \in S \to \{x\} \in P(S)$ (che sia iniettiva è immediato, perché elementi distinti hanno immagini distinte $x \neq y \in S \Rightarrow \{x\} \neq \{y\} \in P(S)$; che poi non sia suriettiva è anche immediato, perché elementi di P(S), costituiti da sottoinsiemi aventi più di un elemento, non sono immagine di alcun elemento di S tramite l'applicazione).

Ragioniamo per assurdo supponendo l'esistenza di un'applicazione suriettiva f tra S e P(S), $f: x \in S \to f(x) \in P(S) \Leftrightarrow f(x) \subseteq S$, quindi ci poniamo il problema decisionale di stabilire se un dato elemento x di S appartenga o meno alla propria immagine, cioè se $\forall x \in S$ si abbia $x \in f(x)$ oppure $x \notin f(x)$.

Sia $Y = \{x \in S / x \notin f(x)\} \subseteq S$ l'insieme di tutti gli elementi di S che non appartengono alla propria immagine.

Osserviamo subito che tale insieme non è vuoto perché altrimenti si avrebbe che ogni elemento x di S apparterrebbe alla propria immagine f(x), quindi considerato l'insieme vuoto che è un elemento di P(S), per la supposta suriettività di f dovrebbe esistere almeno un elemento $x \in S$ appartenente alla propria immagine $f(x) = \emptyset$, assurdo perché il vuoto non ha elementi.

Ora $Y \subseteq S \Rightarrow Y \in P(S)$, quindi per la supposta suriettività di f deve esistere almeno un elemento $y \in S$ tale che $f(y) = Y$; si presentano due sole possibilità ( principio del terzo escluso!), $y \in Y$ oppure $y \notin Y$.

Se $y \in Y$, per definizione di Y si ha $y \notin f(y) \Rightarrow y \notin Y$, assurdo; se $y \notin Y$, allora per la definizione di Y segue che $y \in f(y)$, ossia $y \in Y$, assurdo. Quindi non potendo esistere applicazioni suriettive di S in P(S), non possono esistere neppure applicazioni biiettive di S in P(S), donde il teorema.

Definito con $T^S = \left\{ f: S \xrightarrow{f} T \right\}$ l'insieme di tutte le applicazioni dell'insieme S nell'insieme T , l'insieme $\{0,1\}^S = \left\{ f: S \xrightarrow{f} \{0,1\} \right\}$ è l'insieme di tutte le applicazioni di S nell'insieme $\{0,1\}$, che per il seguente teorema risulta equipotente all'insieme delle parti di S.

Teorema: Se S è un insieme e P(S) l'insieme delle sue parti, si ha $|P(S)| = |\{0,1\}^S|$

Dimostrazione:

$\forall X \subseteq S$ definiamo l'applicazione caratteristica su X $\varphi_X : x \in S \xrightarrow{\varphi_X} \varphi_X\,(x) = \begin{Bmatrix} 1, & x \in X \\ 0, & x \notin X \end{Bmatrix}$.

La funzione $f : X \in P(S) \xrightarrow{f} f(X) = \varphi_X \in \{0,1\}^S$ è biiettiva.

Infatti f è iniettiva perché elementi aventi uguale immagine coincidono, cioè $f(X) = f(Y)$ $\Rightarrow X = Y$, in quanto $f(X) = f(Y) \Leftrightarrow \varphi_X = \varphi_Y$, da cui segue $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, poiché $\forall s \in X$ si ha $\varphi_X(s) = 1 \Leftrightarrow \varphi_Y(s) = 1 \Leftrightarrow s \in Y$.

La f è suriettiva poiché l'insieme delle immagini $f[P(S)] = \{0,1\}^S$ coincide con l'insieme delle applicazioni di S in $\{0,1\}$, avendosi ciò se comunque preso un elemento $g \in \{0,1\}^S$, $\exists X \subseteq S \,/ \varphi_X = g$, ossia comunque scelta una funzione di S in $\{0,1\}$, esiste un opportuno sottoinsieme X di S la cui funzione caratteristica $\varphi_X$ coincide con l'applicazione data g.

Consideriamo per questo $X = \{s \in S \,/ g(s) = 1\}$ insieme di tutti gli elementi di S aventi immagine tramite g uguale a 1.

Si ha $\varphi_X = g$ perché le due funzioni coincidono su ogni elemento di X e su ogni elemento di S – X avendosi $s \in X \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_X(s) = 1 \\ g(s) = 1 \end{Bmatrix}$ e $s \in S - X \Rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_X(s) = 0 \\ g(s) = 0 \end{Bmatrix}$. Il teorema è così provato.

Un insieme S si dice numerabile se è equipotente all'insieme dei numeri naturali, cioè se $|S| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$, Si prova che ogni insieme numerabile è infinito e che l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è numerabile così come l'insieme di tutti i numeri algebrici. Dimostreremo più avanti tali risultati.

In base alla proposizione precedente segue che $|P(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$, ossia che le parti di $\mathbb{N}$ hanno lo stesso "numero infinito di elementi"dell'insieme di tutte le funzioni di $\mathbb{N}$ nell'insieme $\{0,1\}$, cioè di tutte le successioni aventi come elementi i numeri 0 e 1. Quindi per i teoremi precedenti deve essere $|\mathbb{N}| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$,ma tale risultato lo si può subito dimostrare nel modo seguente. Posto $A = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, insieme di tutte le successioni del tipo 0,1,1,0,…,chiaramente infinito, facciamo vedere, utilizzando il procedimento di diagonalizzazione di Cantor, che non possono esistere sottoinsiemi E numerabili di A che non siano propri, quindi necessariamente A non è numerabile poiché altrimenti, essendo $A \subseteq$A , A contenendo sé stesso, conterrebbe un sottoinsieme numerabile non proprio. Per accertarci che ogni sottoinsieme numerabile E di A deve necessariamente essere un sottoinsieme proprio di A, osserviamo che se $E \subseteq$A, allora gli elementi di E sono delle successioni $\{s_1\}, \{s_2\}, \cdots, \{s_n\}, \cdots$aventi come elementi le cifre 0,1. Se ora la n-ma

cifra di $\{s_n\}$ è 1, poniamo tale cifra uguale a 0 e viceversa, e ciò per ogni n, cioè facciamo questo in tutte le successioni $\{s_1\}, \{s_2\}, \cdots, \{s_n\}, \cdots$, disponendo tutti gli elementi di ogni successione in una riga, ottenendo una tabella di infinite righe e infinite colonne di 0 e 1. Allora cambiamo il primo elemento della prima riga e prima colonna, della seconda riga seconda colonna, ecc. La successione $\{s\}$ che otteniamo utilizzando gli elementi della diagonale della tabella, non è una delle successioni $\{s_1\}, \{s_2\}, \cdots, \{s_n\}, \cdots$, differendo da queste per un elemento in almeno un posto, per cui $\{s\} \notin \mathrm{E}$ . Ma essendo $\{s\} \in A$, segue che $E \subset$A, cioè E è un sottoinsieme proprio di A. Se rappresentiamo i numeri reali in base binaria anziché decimale, tale risultato implica che <u>l'insieme dei numeri reali non è numerabile</u>. Daremo in seguito un'ulteriore dimostrazione.

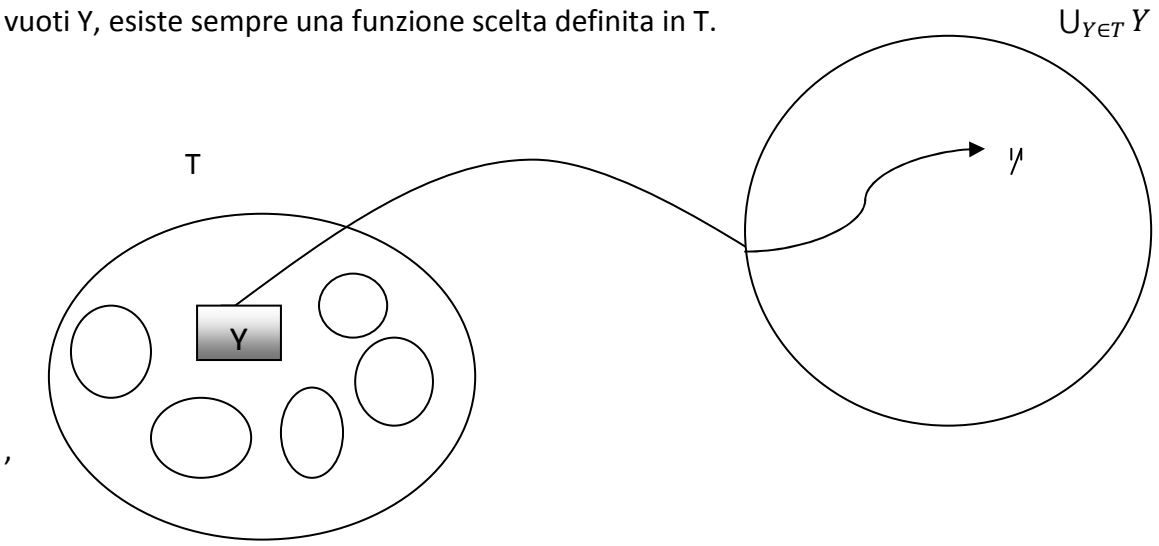
Si dice che un insieme S ha la <u>potenza del continuo</u> se $|S| = |P(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ , cioè se S risulta equipotente all'insieme delle parti di $\mathbb{N}$, avente la stessa cardinalità di tutte le successioni di elementi 0 e 1. L'ipotesi che la potenza del continuo sia la "più piccola" maggiore del numerabile è indecidibile nel senso (in linea al teorema di Godel) che non si può provarne la verità o la falsità, come ha dimostrato il matematico Paul J. Cohen ( vedi" la teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo" ed. Feltrinelli). Sia accettandola che rifiutandola si hanno teorie non contraddittorie.

Vediamo ora degli approfondimenti delle problematiche dell'infinito, cominciando da concetti estremamente importanti per tutta la matematica.

<u>Definizione</u>: Se T è un insieme i cui elementi sono insiemi Y non vuoti, considerato l'insieme

$\bigcup_{Y \in T} Y$, si dice <u>funzione scelta</u> di T nell'unione $\bigcup_{Y \in T} Y$, un'applicazione $f: Y \in T \to y \in Y \subseteq \bigcup_{Y \in T} Y$, che, associando ad ogni insieme Y elemento di T, un elemento y$\in Y$, permette di "scegliere" in ogni insieme Y un suo elemento y.

<u>Assioma della scelta</u> o di <u>Zermelo</u> : Se T è un insieme non vuoto avente come elementi insiemi non vuoti Y, esiste sempre una funzione scelta definita in T.




Il seguente teorema stabilisce che tutti gli insiemi hanno potenze tra loro confrontabili.

<u>Teorema di Hartogs</u>: Se S e T sono insiemi, si ha almeno una delle due eventualità, $|S| \leq |T|$ oppure $|T| \leq |S|$.

Osservazione: Il teorema non esclude che si possono verificare simultaneamente le due eventualità. Tale possibilità è esclusa dal seguente teorema di Cantor – Bernstein.

Teorema di Cantor – Bernstein: Se sono vere entrambe le relazioni $|S| \leq |T|$ e $|S| \geq |T|$, allora necessariamente si ha $|S| = |T|$.

Osservazione: Ciò significa che se esistono contemporaneamente un'applicazione di S in T e di T in S entrambe iniettive, allora deve esistere un'applicazione biiettiva di S in T. I due teoremi insieme implicano il seguente,

Teorema di tricotomia: Se S e T sono insiemi, allora si presenta una ed una sola delle eventualità

$|S| \leq |T|$, $|S| = |T|$, $|S| \geq |T|$.

Dimostrazione: Che se ne presenti almeno una, è assicurato dal teorema di Hartogs, il fatto poi che sia unica segue dal teorema di Cantor – Bernstein. Infatti se si presenta la prima e la seconda, vale la prima, così se si presenta la seconda e la terza, vale la terza, infine se si presenta la prima e la terza, per il teorema di Cantor – Bernstein vale la seconda.

Risale al matematico Richard Dedekind l'affermazione che un insieme è infinito se e solo se è equipotente ad una sua parte propria. Ciò è certamente vero per $\mathbb{N}$ (e per insiemi numerabili) perché, ad esempio, si può stabilire la corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e il suo sottoinsieme proprio dei numeri pari definita da $n \to 2n$ , $\forall n \in \mathbb{N}$. Però lo si può dimostrare in generale, valendo il seguente insieme che caratterizza gli insiemi infiniti.

Teorema: Se S è un insieme, sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1. S è infinito.
2. $|\mathbb{N}| \leq |S|$.
3. Esiste una parte propria $X \subset S$ X di S equipotente ad S, cioè $|X| = |S|$.

Nota: Se è vera una delle implicazioni $1) \Rightarrow 2)$ , $2) \Rightarrow 3)$, $3) \Rightarrow 1)$, allora per la proprietà transitiva dell'equivalenza logica si ha che $1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 3)$.

Dimostrazione: Cominciamo col provare che $1) \Rightarrow 2)$.

Sia $P(S) - \{\emptyset\}$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi non vuoti X di S, avendo ciò significato perché $P(S) - \{\emptyset\} \neq \emptyset$ in quanto essendo S per ipotesi infinito, necessariamente deve aversi $S \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in S \Rightarrow \{x\} \in P(S)$ $\Rightarrow \{x\} \in P(S) - \{\emptyset\} \Rightarrow P(S) - \{\emptyset\} \neq \emptyset$. Stabilito quindi che tali sottoinsiemi X esistono non vuoti, consideriamo l'unione di essi $\bigcup_{X \in P(S)-\{\emptyset\}} X$. Si ha $\bigcup_{X \in P(S)-\{\emptyset\}} X = S$, poiché $\forall x \in \bigcup_{X \in P(S)-\{\emptyset\}} X \Leftrightarrow x \in S$, donde $\bigcup_{X \in P(S)-\{\emptyset\}} X \subseteq S$ e $\bigcup_{X \in P(S)-\{\emptyset\}} X \supseteq S$, da cui segue l'uguaglianza.

Per l'assioma della scelta, deve esistere una funzione scelta
$f: X \in P(S) - \{\emptyset\} \xrightarrow{f} f(X) = x \in X \subseteq \bigcup_{X \in P(S)-\{\emptyset\}} X = S$. Per dimostrare che $|\mathbb{N}| \leq |S|$, ci costruiamo

un'applicazione iniettiva da $\mathbb{N}$ a S. Poiché $S \in P(S) - \{\emptyset\}$, la sua immagine tramite la funzione scelta f è $f(S) = x_1 \in S$, dove $S - \{x_1\} \neq \emptyset$ perché se fosse $S - \{x_1\} = \emptyset \Rightarrow S = \{x_1\} \Rightarrow S$ finito, contro l'ipotesi.

Consideriamo quindi l'immagine tramite f di $S - \{x_1\}$, $f(S - \{x_1\}) = x_2 \in S - \{x_1\}$, dove $x_1 \neq x_2$ essendo $S - \{x_1\} = \emptyset$, quindi $S - \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$ ( se fosse $S - \{x_1, x_2\} = \emptyset$, allora $S = \{x_1, x_2\}$, ovvero S finito contro l'ipotesi) e la sua immagine $f(S - \{x_1, x_2\}) = x_3 \in S - \{x_1, x_2\}$, avendosi $x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2$, altrimenti risulterebbe $S - \{x_1, x_2\} = \emptyset$.

Procedendo per induzione, si definisce $\forall n \in \mathbb{N}$ l'immagine attraverso la funzione scelta f di $S - \{x_1, \cdots, x_{n-1}\} \neq \emptyset$, $f(S - \{x_1, \cdots, x_{n-1}\}) = x_n \in S - \{x_1, \cdots, x_{n-1}\}$, con $x_n \neq x_1, \cdots, x_n \neq x_n$.

L'applicazione $g: \mathbb{N} \to S$ definita dalla legge di trasformazione $n \to g(n) = x_n$, risulta iniettiva in quanto

$n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m$ , da cui l'asserto.

2) ⇒ 3). L'ipotesi $|\mathbb{N}| \leq |S|$ implica che esiste un'applicazione iniettiva, eventualmente pure suriettiva nel caso dell'uguaglianza, $g: n \in \mathbb{N} \to g(n) = x_n \in S$, per cui elementi distinti devono avere immagini distinte, cioè $n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m$. Si presentano due casi:

a) l'applicazione g è biiettiva, essendo pure suriettiva.
b) L'applicazione g è solo suriettiva

Nel caso a) tutti gli elementi di S sono indiciabili, per cui essi costituiscono la successione $S = \{x_n\}_{\cdot n \in \mathbb{N}}$.

Considerata allora ad esempio la successione estratta di indice pari $X = \{x_{2k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,essa rappresenta una parte propria di S, $X \subset S$ equipotente ad S, ossia $|X| = |S|$, essendo biunivoca l'applicazione

$x_k \xrightarrow{\varphi} x_{2k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, per cui l'asserto è provato in questo caso.

Nel caso b), in cui g è solo iniettiva ma non suriettiva, esistono nell'insieme S elementi $x_n$, $n \in \mathbb{N}$ indiciabili e elementi x non indiciabili. Sia $\Omega_1$l'insieme degli elementi di S indiciabili e $\Omega_2$ l'insieme degli elementi di S non indiciabili, per cui $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ costituisce una partizione di S, avendosi $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $\Omega_1 \cup \Omega_2 = S$. Se $x_1 \in \Omega_1$è un elemento indiciabile, consideriamo la parte propria di S $X = S - \{x_1\} \subset$ S, per cui $x_1 \notin X$.

Essendo $X \subseteq S$, l'immersione i di X in S $x \in X \xrightarrow{i} x \in S$ è iniettiva, donde $|X| \leq |S|$. Ma si ha pure $|X| \geq |S|$. Infatti considerata l'applicazione $f: x \in S \to \begin{Bmatrix} f(x) = x_n \in X, \ x \in \Omega_1 \\ f(x) = x \in X, \ x \in \Omega_2 \end{Bmatrix}$ di S in X che associa ad ogni elemento di S indiciabile il successivo in X e agli elementi di S non indiciabili sé stessi in X.

L'applicazione f è iniettiva. Infatti presi comunque due elementi indiciabili distinti $y \neq z$, $y, z \in \Omega_1$, allora devono esistere due opportuni indici $n \neq m \in \mathbb{N}$tali che $y = x_n$, $z = x_m$ (necessariamente deve essere $n \neq m$, altrimenti $y = z$), si ha $f(y) = x_{n+1}$, $f(z) = x_{m+1}$, da cui $x_{n+1} \neq x_{m+1}$ ( se $x_{n+1} = x_{m+1}$, per l'iniettività di g si avrebbe $n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m$, assurdo); quindi $y \neq z \Rightarrow f(y) \neq f(z)$, $\forall y, z \in \Omega_1$, da cui si ricava che per cui, avendo elementi distinti di $\Omega_1$ immagini distinte, l'applicazione f è iniettiva.

Nel caso che y ∈ $\Omega_1$e $z \in \Omega_2$ in cui y è indiciabile e z non è indiciabile, da $y = x_n$ e $z = z$, segue che $y \neq z$ ( se y = z, allora $z = x_n \Rightarrow z \in \Omega_1$, contro il fatto che z non è indiciabile), e poiché $f(y) = x_{n+1}$ , $f(z) = z$, segue che $x_{n+1} \neq z$( se $x_{n+1} = z$, z sarebbe indiciabile), cioè $y \neq z \Rightarrow f(y) \neq f(z)$, $\forall y \in \Omega_1, \forall z \in \Omega_2$, per cui l'applicazione f è iniettiva.

Infine, nel caso che $y \neq z \in \Omega_2$ sono elementi distinti di S non indiciabili, in base alla definizione di f si ha $f(y) = y$,$f(z) = z$, da cui si ricava $y \neq z \Rightarrow f(y) \neq f(z)$,$\forall y, z \in \Omega_2$. L'applicazione f è anche in questo caso iniettiva e l'asserto è così provato.

$3) \Rightarrow 1)$. Sia X⊂ S una parte propria di S equipotente a S, per cui si ha $|X| = |S|$. Se per assurdo S fosse finito, allora vi sono due alternative: a) S è l'insieme vuoto, ovvero $S = \emptyset$, b) Esiste un'n-pla ni numeri naturali equipotente a S, ossia $\exists n \in \mathbb{N} / |S| = |\{1, \cdots, n\}|$.

Nel caso a), essendo X⊂ S, $X \neq \emptyset$, necessariamente $S \neq \emptyset$.

Nel caso b), dal fatto che $|S| = |\{1, \cdots, n\}|$ per $n \in \mathbb{N}$ opportuno, essendo X⊂ S, X avrebbe al più $n - 1$ elementi, per cui $|X| \leq |\{1, \cdots, n-1\}|$, mentre essendo per ipotesi $|X| = |S|$, risulterebbe pure $|X| = |\{1, \cdots, n\}|$, donde l'assurdo $|\{1, \cdots, n\}| \leq |\{1, \cdots, n-1\}|$, avendosi $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\{1, \cdots, n-1\}| < |\{1, \cdots, n\}|$, Allora necessariamente S deve essere infinito e l'asserto è così provato.

<u>Nota</u>: Poiché l'equivalenza tra due proposizioni equivale all'equivalenza delle loro negazioni,, dal teorema precedente si deduce che:

<u>Teorema</u>: Se S è un insieme, sono equivalenti le seguenti proposizioni:

1. S è finito.
2. $|S| < |\mathbb{N}|$.
3. Ogni parte propria $X \subset S$ X di S ha cardinalità inferiore a quella di S , cioè $|X| < |S|, \forall X \subset$ S.

Vediamo ora delle importanti proprietà degli insiemi numerabili.

<u>Teorema</u>: Il prodotto cartesiano di un numero finito di insiemi numerabili, è un insieme numerabile.

<u>Dimostrazione</u>: Se $S_1, S_2, \cdots, S_p$ sono insiemi numerabili, per provare che $\forall p \in \mathbb{N}$ $\left|\prod_{i=1}^{p} S_i\right| = \left|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_p\right| = |\mathbb{N}|$, è sufficiente trovare un'applicazione biiettiva tra il prodotto cartesiano $\prod_{i=1}^{p} S_i$ e $\mathbb{N}$.

Ragioniamo per induzione, cominciando col provare che il prodotto di due insiemi numerabili è numerabile, quindi, supposto che il prodotto di p – 1 insiemi numerabili è numerabile, proviamo che anche il prodotto di p insiemi è numerabile. Per il principio d'induzione allora anche il

prodotto $\prod_{i=1}^{p} S_i$, $\forall p \in \mathbb{N}$ è numerabile. Iniziamo quindi con due insiemi S e T numerabili e proviamo che $S \times T$ è numerabile, cioè $|S \times T| = |\mathbb{N}|$.

Per il fatto che S e T sono numerabili, devono esistere due applicazioni biiettive $f: n \in \mathbb{N} \to f(n) = s_n \in S$ e $g: n \in \mathbb{N} \to g(n) = t_n \in T$ in modo tale che tutti gli elementi di S e di T risultino indicizzabili. Essendo il prodotto cartesiano $S \times T = \{(s,t), s \in S, t \in T\} = \{(s_n, t_m)/n, m \in \mathbb{N}\}$ l'insieme delle coppie ordinate con primo elemento in S e secondo in T,nella tabella infinita contenente tutti gli elementi di $S \times T$, si può costruire, con un processo di diagonalizzazione come indicato dalle frecce, la successione di coppie ordinate

$(s_1, t_1), (s_2, t_1), (s_1, t_2), (s_3, t_1), \cdots$

$$\begin{array}{cccc} (s_1,t_1) & (s_2,t_1) & (s_3,t_1) & \cdots \\ (s_1,t_2) & (s_2,t_2) & (s_3,t_2) & \cdots \\ (s_1,t_3) & (s_2,t_3) & (s_3,t_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

potendosi quindi associare ad ogni numero naturale una ed una sola coppia ordinata e ad ogni coppia uno ed un sol numero naturale; ciò definisce un'applicazione biiettiva, donde $|S \times T| = |\mathbb{N}|$.

Supposto ora numerabile il prodotto $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{p-1}$, si ha che è numerabile anche $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_p$, perché $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_p = \left(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{p-1}\right) \times S_p$ risulta essere il prodotto di due insiemi numerabili, che è numerabile per quanto già provato nella base induttiva, da cui segue $\left|\left(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{p-1}\right) \times S_p\right| = |\mathbb{N}|$. Osservato che l'applicazione

$\left(x_1, \cdots, x_{p-1}, x_p\right) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{p-1} \times S_p \to \left(\left(x_1, \cdots, x_{p-1}\right), x_p\right) \in \left(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{p-1}\right) \times S_p$è chiaramente biiettiva, si ha $\left|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{p-1} \times S_p\right| = \left|\left(S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{p-1}\right) \times S_p\right|$, da cui per la proprietà transitiva dell'equipotenza $\left|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_p\right| = |\mathbb{N}|$.

<u>Corollario</u>: L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile.

<u>Dimostrazione</u>: Per p = 2 il teorema precedente assicura che il prodotto cartesiano di due insiemi numerabili è numerabile. Ogni numero razionale è del tipo $\frac{a}{b}$ ,a $\in \mathbb{Z}$, b $\in \mathbb{Z} - \{0\}$, Essendo biunivoca l'applicazione $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) \to \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, si ha che $\mathbb{Q}$ è numerabile.

<u>Teorema</u>: Data la successione $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di insiemi $S_n$ numerabili, allora l'unione $\bigcup_{n \in N} S_n$ è un insieme numerabile, cioè si ha $|\bigcup_{n \in N} S_n| = |\mathbb{N}|$.

<u>Dimostrazione</u>: Posto $S = \bigcup_{n \in N} S_n$, per la supposta numerabilità degli insiemi $S_n$, per ogni fissato numero naturale n, esiste un'applicazione biiettiva $f_n: S_n \to \mathbb{N}$. Osservato che per il teorema precedente si ha che $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, cerchiamo un'applicazione $g: S \xrightarrow{g} \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ che sia iniettiva, implicando ciò $|S| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Poiché $\forall x \in S = \bigcup_{n \in N} S_n \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}/x \in S_n$ , per il principio

del buon ordinamento l'insieme degli indici $\mathcal{I}_{\mathrm{x}} = \{\mathrm{n} \in \mathbb{N}/\mathrm{x} \in S_n\}$ deve ammettere un minimo $n_x = min\ \mathcal{I}_{\mathrm{x}}$ che varia al variare di x in S, essendo per ogni fissato $x \in S$ il minimo indice tale che $x \in S_{n_x}$. Poiché per ipotesi gli $S_{n_x}$devono essere numerabili, deve esistere un'applicazione biiettiva $f_{n_x}: x \in S_{n_x} \xrightarrow{f_{n_x}} f_{n_x}(x) = m_x \in \mathbb{N}$. Definiamo quindi l'applicazione $g: x \in S = \bigcup_{n \in N} S_n$ $\rightarrow g(x) = (n_x, m_x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la quale è un'applicazione perché per ogni fissato x è unica la coppia $(n_x, m_x)$.

Si ha che g è iniettiva perché se due elementi x e y aventi uguale immagine coincidono, ossia $g(x) = g(y) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in S$, in quanto $g(x) = g(y) \Rightarrow (n_x, m_x) = (n_y, m_y)$ $\Rightarrow\ n_x = n_y, m_x = m_y \Rightarrow S_{n_x} = S_{n_y} \Rightarrow f_{n_x}(x) = f_{n_y}(y) \Rightarrow x = y$, l'ultima implicazione essendo valida per l'iniettività di $f_{n_x}$. Risultando allora g iniettiva, si ha $|S| \leq |\mathbb{N}|$; proviamo adesso che si ha pure $|S| \geq |\mathbb{N}|$.

Per ipotesi gli insiemi $S_k$ sono numerabili, avendosi $|S_k| = |\mathbb{N}|$, quindi da $S_k \subseteq \mathrm{S}, \forall \mathrm{k} \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_k| \leq |S|$ essendo iniettiva l'applicazione $x \in S_k \rightarrow x \in S = \bigcup_{n \in N} S_n$, donde$|\mathbb{N}| \leq |S|$. Per il teorema di Cantor – Bernstein segue che $|S| = |\mathbb{N}|$, ossia che l'unione numerabile di un numero infinito di insiemi numerabili è numerabile.

<u>Osservazione</u>: Il teorema si prova subito se supponiamo che gli insiemi $S_n$ sono a due a due disgiunti.

Infatti dall'ipotesi di numerabilità ognuno di tali insiemi si può scrivere come una successione $S_n = \{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, per cui allora si ha $S = \bigcup_{n \in N} S_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$.

L'applicazione $(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{f}} a_{n_k} \in S$ è biunivoca perché, avendosi $S_n \cap S_m = \emptyset$, gli insiemi non hanno elementi in comune per cui $a_{n_k} = a_{m_h} \Leftrightarrow (n, k) = (m, h) \Leftrightarrow n = m, k = h$, quindi da $|S| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ e $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, segue $|S| = |\mathbb{N}|$.

<u>Teorema</u>: L'unione di un numero finito d'insiemi numerabili $S_1, S_2, \cdots, S_p$ è numerabile per cui si ha $\left|\bigcup_{n=1}^{p} S_n\right| = |\mathbb{N}|$.

<u>Dimostrazione</u>: Per $n = 1,2, \cdots, p$, ogni insieme $S_n = \{\mathrm{a_{n,k}}\}_{\mathrm{k} \in \mathbb{N}}$, per il fatto di essere numerabile , risulta essere una successione, donde gli elementi di $S = \bigcup_{n=1}^{p} S_n = \bigcup_{n=1}^{p} \{\mathrm{a_{n,k}}\}_{\mathrm{k} \in \mathbb{N}}$ si possono disporre nella seguente tabella avente un numero finito p di righe ed infinite colonne

$$\begin{array}{lllll}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \cdots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \cdots \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \cdots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \cdots \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \cdots & a_{3,p-1} & a_{3,p} \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{p,1} & a_{p,2} & a_{p,3} \cdots & a_{p,p-1} & a_{p,p} \cdots
\end{array}$$

quindi ci costruiamo la successione seguente che include tutti gli elementi della tabella nel modo indicato dalle frecce

$$a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,1}, a_{1,3}, a_{2,2}, a_{3,1}, \cdots, a_{1,p}, a_{2,p-1}, \cdots, a_{p,1}, a_{1,p+1}, a_{2,p}, a_{3,p-1}, \cdots, a_{p,2}, a_{1,p+2}, \cdots$$

Quindi, l'insieme S è numerabile.

<u>Teorema</u>: L'unione di un'infinità numerabile di insiemi finiti è numerabile.

<u>Dimostrazione</u>: Si tratta di provare che $|S| = \left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{n,k_n}\right| = |\mathbb{N}|$ nell'ipotesi che $\forall n \in \mathbb{N}$ sono finiti con $k_n \in \mathbb{N}$ elementi, gli insiemi $S_{n,k_n}$. Infatti è sufficiente disporre in sequenza per ogni fissato n gli elementi di ogni $S_{n,k_n} = \{a_{n,1}, \cdots, a_{n,k_n}\}$, per ottenere la successone
$a_{1,1}, \cdots, a_{1,k_1}, a_{2,1}, \cdots, a_{2,k_2}, \cdots$

degli elementi di S.

Precedentemente abbiamo detto che l'insieme dei numeri algebrici è numerabile. Ci proponiamo di dimostrare questa proposizione.

Si dice che un numero complesso z è <u>algebrico</u> se esistono n+1 interi non tutti nulli $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tali che $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$.

Per un motivo che sarà chiaro in seguito, ci proponiamo di determinare il numero dei vettori $(|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_n|)$, con componenti non tutte contemporaneamente nulle $|a_i| \geq 0$, $(i =$ *0,1,2,⋯,n*, che siano soluzioni dell'equazione *a0+a1+⋯+an=s*, con s intero positivo.

Posto $x_k$, $(k = 1,2, \dots, r), r \in \mathbb{N}$ , in sostituzione dei termini $|a_i|$ e l'intero n al posto di s, l'equazione precedente diviene $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ , con $r < n$, per cui il problema equivale alla ricerca del numero di vettori interi non negativi $(x_1, x_2, \dots, x_r)$. Inizialmente mettiamoci nel caso particolare che sia $x_k > 0\ \forall k \in \{1,2, \dots, r\}$, donde il problema è quello di determinare il numero delle soluzioni intere positive dell'equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$.

Ciò si può visualizzare calcolando i modi con cui si possono distribuire n palline indistinguibili in n urne, mettendo $x_1$ palline nella prima urna, $x_2$nella seconda,…, $x_r$ palline nell'r-ma urna. Si sono ripartite le n palline iniziali in r gruppi nel modo seguente: tra le n palline iniziali vi sono n – 1 spazi tra palline adiacenti, tra questi ne scegliamo r – 1 come punti di divisione, ottenendo r gruppi di palline da mettere nelle r urne. A questo punto notiamo che il numero dei modi con cui si possono scegliere gli r – 1 punti di divisione tra n - 1 palline ( la prima è esclusa) è dato dalle combinazioni semplici di n – 1 oggetti presi a r – 1 a r – 1 alla volta, cioè $C_{n-1,r-1} = \binom{n-1}{r-1}$.

Analizziamo ora il caso più generale in cui $x_k \geq 0\ \forall k \in \{1,2, \dots, r\}$delle soluzioni non negative dell'equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$. Sommando l'unità ad ogni $x_k$ r volte, otteniamo $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \cdots + (x_r + 1) = n + r$, per cui posto $y_k = x_k + 1$, il numero delle soluzioni non negative dell' equazione $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ è uguale al numero delle soluzioni positive dell'equazione $y_1 + y_2 + \cdots + y_r = n + r$, cioè $C_{n+r-1,r-1} = \binom{n+r-1}{r-1}$.

Ritornando al nostro caso $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n| = s$, il numero delle soluzioni dell'equazione, uguale al numero delle n + 1 – ple componenti del vettore $(|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_n|)$ è

$\binom{s+(n+1)-1}{(n+1)-1} = \binom{s+n}{n}$ e ciò implica che se $N = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$, il numero dei vettori $(n, |a_0|, |a_1|, \cdots, |a_n|)$ aventi n + 2 componenti è $\binom{N+(n+2)-1}{(n+2)-1} = \binom{N+n+1}{n+1}$.
Fissato allora il numero positivo $N = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$ detto altezza del polinomio, esistono in corrispondenza $\binom{N+n+1}{n+1}$ equazioni $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$, per ognuna delle quali è individuato un numero algebrico $z \in \mathcal{C}$ soluzione di essa.

Al numero N si può quindi associare l'insieme $S_N$ costituito dai $\binom{N+n+1}{n+1}$ numeri algebrici soluzioni delle rispettive equazioni. La successione $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ è quindi costituita da insiemi finiti, pertanto l'unione $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} S_N$ è l'unione numerabile di insiemi finiti, che risulta numerabile per il teorema precedente.

<u>Nota</u>: Il risultato precedente, oltre a determinare il numero delle soluzioni intere non negative di un'equazione del tipo $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$, ha diverse applicazioni; vediamone una.

Un investitore ha un capitale di 20000 euro e decide di frazionarlo in quattro possibili investimenti, investendo una parte intera in migliaia di euro in ciascun investimento. Si vuole sapere il numero delle possibili strategie qual'ora si utilizzi l'intero capitale oppure solo una parte a scelta di esso.

Se n = 20 in migliaia di euro è il capitale e r = 4 il numero delle possibili strategie d'investimento, per $k = 1,2,3,4$ siano $x_k$ le possibili ripartizioni della somma, allora il numero degli investimenti è dato dalle soluzioni intere non negative dell'equazione$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$. Tale numero è

$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{20+4-1}{4-1} = \binom{23}{3} = 1771$ corrispondente alle strategie possibili d'investimento.

Se invece si vuole investire solo una parte della somma, indicata con $x_5$ la somma da trattenere, una strategia è un vettore di interi $(x_1 x_2, x_3, x_4, x_5)$ tale che $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$, da cui si deduce che le possibili strategie sono $\binom{20+5-1}{5-1} = \binom{24}{4} = 10626$.

A pag.5 abbiamo visto che l'insieme dei numeri reali non è numerabile. Ci proponiamo ora di approfondire tale fatto analizzando con maggiore accuratezza il concetto di numero reale.

<u>Definizione</u>: Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono sottoinsiemi non vuoti di numeri reali, Si dice che la coppia $(A, B)$ è una <u>partizione</u> di $\mathbb{R}$ se $\begin{matrix} A \cup B = \mathbb{R} \\ A \cap B = \emptyset \end{matrix}$, ovvero quando l'unione degli insiemi disgiunti A e B ricopre $\mathbb{R}$ .

<u>Esempio</u>: Gli insiemi $A = (-\infty, 2) \cup \{5\}$ e $B = [2,5) \cup (5, +\infty)$ costituiscono una partizione di $\mathbb{R}$.

<u>Definizione</u>: Se $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, totalmente ordinato secondo la relazione d'ordine usuale di $\leq$, si dice che un numero reale $m \in \mathbb{R}$ è un <u>minorante</u> dell'insieme A se $\forall a \in A$ risulta $m \leq a$. Quindi un minorante di un insieme può, come non può, appartenere all'insieme, risultando non superiore a un qualsiasi elemento dell'insieme. Nel caso che m appartiene all'insieme, prende il nome di

minimo dell'insieme A, risultando il più grande dei minoranti di A, per cui
$m = minA \overset{def}{\Longleftrightarrow} m \in A, m \leq a, \forall a \in A.$

Analogamente è un maggiorante di A ogni numero $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$, appartenente o non appartenente all'insieme A, non minore di ogni elemento di A, cioè tale che $M \geq a, \forall a \in A$. Nel caso che un maggiorante M è un elemento di A, esso risulta il più piccolo dei maggioranti di A e si dice massimo di A; quindi $M = maxA \overset{def}{\Longleftrightarrow} M \in A, M \geq a, \forall a \in A.$ Si prova subito, ragionando per assurdo, che il massimo e il minimo di un insieme A, se esistono, sono unici.

Esempio: Se $A = (-\infty, 2) \cup \{5\}$ , allora ogni numero $\mathrm{x} \in \mathbb{R}/\mathrm{x} \geq 5$ è un maggiorante di A; x = 5 è il massimo di A. Si noti che l'insieme A è privo di minoranti, per cui non ha minimo.

Definizione: Se $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subseteq \mathbb{R}$ sono sottoinsiemi non vuoti di numeri reali, Si dice che la coppia $(A, B)$ è una sezione di $\mathbb{R}$ se $\begin{matrix} 1)\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \text{è una partizione di } \mathbb{R} \\ 2)\ \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}, \forall \mathrm{b} \in \mathrm{B}, \text{si ha } \mathrm{a} < b \end{matrix}$ , indicando il punto 2) che A è la classe dei di tutti i minoranti dell' insieme B e B è la classe di tutti i maggioranti dell'insieme A, ossia che le classi sono separate.

Definizione: Le classi A,B separate di una partizione di $\mathbb{R}$ si dicono contigue se $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B \ / \ |b - a| < \varepsilon$. Si dice allora che le due classi hanno la proprietà dell'avvicinamento indefinito.

Esempio: $A = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}/\mathrm{x} > 0\}, B = \mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R}/\mathrm{x} \leq 0\}$ è una sezione di $\mathbb{R}$, dove le classi A e B risultano contigue perché la differenza tra numeri positivi e non positivi si può rendere piccola a piacere.

Un numero reale si può definire come un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ chiamato sezione. Una sezione $\alpha = (A, B), \mathrm{A}, \mathrm{B} \subseteq \mathbb{Q}$ del campo razionale, è per definizione un insieme $\alpha \subset \mathbb{Q}$ avente le proprietà:

detti p,q,r dei numeri razionali ed $\alpha$ una sezione di $\mathbb{Q}$

1. $\alpha \neq \emptyset, \alpha \neq \mathbb{Q}$
2. $p \in \alpha, q \in \mathbb{Q},\ allora\ q < p \Rightarrow q \in \alpha$
3. $p \in \alpha \Rightarrow \exists r \in \alpha / \ p < r$

Si osservi che la 3) afferma che $\alpha$ non ha massimo, mentre la 2) implica che

$\mathrm{p} \in \alpha,\ \mathrm{q} \notin \alpha \Rightarrow \mathrm{p} < q$

$\mathrm{r} \notin \alpha,\ \mathrm{r} < s \Rightarrow \mathrm{s} \notin \alpha$

Si dimostra che $\mathbb{R}$ è un campo ordinato con la proprietà dell'estremo superiore e che $\mathbb{Q}$ è un sottocampo isomorfo ad $\mathbb{R}$, inoltre si prova che due campi ordinati con la proprietà dell'estremo superiore sono isomorfi. Si rimanda per questo il lettore ad un testo specialistico di Algebra. Si deve a Dedekind la costruzione dei numeri reali attraverso le sezioni in $\mathbb{Q}$, invece la costruzione di $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$ mediante successioni di Cauchy, in cui ogni numero reale è definito come una

classe di equivalenza di successioni di Cauchy di numeri razionali si deve a Cantor. Entrambi i risultati furono pubblicati nel 1872.

Una tra le più importanti proprietà dei numeri reali è la continuità; gli interi e i numeri razionali non ne godono. Essa rende "naturalmente"i numeri reali adatti all'analisi matematica in cui vi sono relazioni più complesse delle operazioni algebriche elementari. La continuità è però un assioma fondamentale della teoria dei numeri, dovuto al matematico tedesco Dedekind, il quale sta appunto ad indicare che la retta reale non presenta lacune.

Assioma della continuità dei numeri reali ( di Dedekind ): Per ogni sezione (A,B) in $\mathbb{R}$, esiste un unico numero reale L detto elemento separatore della classe (A,B), tale che
$a \leq L \leq b,\ \forall a \in A,\ \forall b \in B.$

Bisogna osservare che non tutte le sezioni del campo razionale $\mathbb{Q}$ hanno elemento separatore in $\mathbb{Q}$ (lo hanno però sempre in $\mathbb{R}$ grazie all'assioma di Dedekind). Infatti ad esempio la sezione di $\mathbb{Q}$ $A = \{\mathrm{a} < 0, \forall a \in \mathbb{Q}^-\} \cup \{\mathrm{a} \in \mathbb{Q}_0^+, \mathrm{a}^2 < 2\}$ , $\mathrm{B} = \{b \in \mathbb{Q}_0^+, \mathrm{b}^2 \geq 2\}$ non ha in $\mathbb{Q}$ elemento separatore, mentre in $\mathbb{R}$ il numero irrazionale $\sqrt{2}$ è l'elemento separatore. Tale fatto evidenzia come il campo dei razionali, non soddisfacendo l'assioma di Dedekind, non è un campo continuo, implicando per questo motivo che la retta reale ha un'infinità non numerabile di punti relativi ai numeri irrazionali.

Definizione: Un insieme $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se ammette almeno un maggiorante, ossia $\exists M \in \mathbb{R} / \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}, \mathrm{a} \leq \mathrm{M}$, per cui risulta che è non vuoto l'insieme dei maggioranti di A $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$.

In modo analogo si dice che

Definizione: L'insieme $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ è limitato inferiormente se esiste almeno un minorante di A, cioè $\exists m \in \mathbb{R} / \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}, \mathrm{a} \geq \mathrm{m}$, da cui segue che l'insieme $\mathfrak{m}(\mathrm{A}) \neq \emptyset$ dei suoi minoranti è non vuoto. Se risulta che A è contemporaneamente limitato inferiormente e superiormente, allora si dice che l'insieme A è limitato.

Proposizione: Se $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente, allora l'insieme dei suoi maggioranti $\mathcal{M}(A)$ ha minimo e se A è limitato inferiormente, l'insieme dei suoi minoranti $\mathfrak{m}(\mathrm{A})$ ha massimo. Il minimo dei maggioranti di A si definisce estremo superiore dell'insieme A, indicando ciò col simbolo $supA = \min \mathcal{M}(A)$. Analogamente si definisce estremo inferiore dell'insieme A il massimo dei minoranti di A, indicando ciò col simbolo $infA = \max \mathfrak{m}(\mathrm{A})$.

Quindi se $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente, allora A ha estremo superiore, se A è limitato inferiormente, ha estremo inferiore.

Dimostrazione: Proviamo la prima affermazione.

Considerato l'insieme complementare $\mathcal{CM}(A) = \{x \in \mathbb{R} / \mathrm{x} \notin \mathcal{M}(A)\}$ di $\mathcal{M}(A)$, la coppia $(\mathcal{CM}(A), \mathcal{M}(A))$ è una partizione di $\mathbb{R}$ poiché $\mathcal{CM}(A) \cup \mathcal{M}(A) = \mathbb{R}$ e $\mathcal{CM}(A) \cap \mathcal{M}(A) = \emptyset$.

Per un qualsiasi elemento $\mu \in \mathcal{CM}(A)$, si ha che $\mu$ per definizione non è un maggiorante di A, donde $\exists a \in A / \mu <$ a e, se $m \in \mathcal{M}(A)$, per definizione m è un maggiorante di A per cui $\exists a \in \mathcal{M}(A)$ / $m \geq a$, da cui segue $\mu < m$, significando ciò che $\mathcal{CM}(A)$ è la classe minorante e $\mathcal{M}(A)$ la classe maggiorante. Allora la coppia $\left(\mathcal{CM}(A), \mathcal{M}(A)\right)$ è una sezione di $\mathbb{R}$

Per l'assioma della continuità deve esistere un unico elemento separatore L delle due classi tale che $\mu \leq L \leq m, \forall \mu \in \mathcal{CM}(A), \forall m \in \mathcal{M}(A)$. Poiché dobbiamo far vedere che $\mathcal{M}(A)$ ha minimo, è sufficiente provare che $L \in \mathcal{M}(A)$, valendo già $L \leq m, , \forall m \in \mathcal{M}(A)$.

Se per assurdo L non fosse un maggiorante di A, allora da $L \notin \mathcal{M}(A)$ segue che $\exists a \in A$ / $a > L$ e poiché si ha $L < \frac{\mathrm{L+a}}{2} < a$, anche $\frac{\mathrm{L+a}}{2}$ non può essere un maggiorante di A , perché altrimenti dovrebbe aversi $\frac{\mathrm{L+a}}{2} \geq a$. Necessariamente quindi $\frac{\mathrm{L+a}}{2} \in \mathcal{CM}(A)$. Abbiamo ora due elementi di $\mathcal{CM}(A)$ L e $\frac{\mathrm{L+a}}{2}$ per cui $L < \frac{\mathrm{L+a}}{2}$**,** da cui si deduce che L non può essere l'elemento separatore delle due classi, contro l'ipotesi. Quindi $L \in \mathcal{M}(A)$ per cui risulta il minimo di $\mathcal{M}(A)$.

Ragionando in modo simile si prova che se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti ha massimo. Lo si lascia al lettore come utile esercizio.

L'estremo inferiore e l'estremo superiore di un insieme limitato di numeri reali, hanno le seguenti caratteristiche proprietà, enunciate dalla seguente proposizione:

<u>Osservazione</u>: La proposizione testé dimostrata è equivalente all'assioma di Dedekind, per cui si può assumere come assioma (dell'estremo superiore)$^{(*)}$ in sostituzione dell'assioma di continuità. Infatti:

$$assioma\ di\ continuità \overset{equivalente}{\Longleftrightarrow} assioma\ dell'estremo\ superiore$$

$Nota^{(*)}$ E' sufficiente assumere come assioma solo quello relativo all'estremo superiore perché questo implica che ogni insieme non vuoto S limitato inferiormente ha l'estremo inferiore. Infatti considerato – S l'insieme degli opposti di S, questo risulta non vuoto e limitato superiormente, quindi dotato di estremo superiore per ipotesi.

<u>Dimostrazione</u>:

La condizione è necessaria in quanto l'implicazione da sinistra verso destra coincide con la proposizione dimostrata. La condizione è pure sufficiente perché, supposto vero l'assioma dell'estremo, in base alle proposizioni pag.16 per ogni sezione (A,B) in $\mathbb{R}$ si ha $\sup A = \inf B$, per cui esiste un unico numero reale L= $\sup A = \inf B$ elemento separatore delle classi (A,B), tale che $a \leq L \leq b,\ \forall a \in A,\ \forall b \in B$.

<u>Proposizione</u>:

1. Se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente, si ha $L = \sup A \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 1)_s\ \forall a \in A, & a \leq L \\ 2)_s \forall \lambda < L, \exists a \in A\ / \lambda < a & \end{array}$

2. Se A⊂ℝ è limitato inferiormente, si ha $l = \inf A \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1)_i\ \forall a \in A, \qquad l \leq a \\ 2)_i \forall \lambda > l, \exists a \in A\ /\lambda > a \end{array}$

<u>Osservazione</u>:

una scrittura operativamente efficace della $2)_s$ è $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A\ /L - \varepsilon < a$ e analogamente per la $2)_i$ $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A\ /\ a < l + \varepsilon$.

<u>Dimostrazione</u>:

Proviamo la 1.

Infatti la $1)_s$equivale a dire che L è un maggiorante di A, mentre la $2)_s$afferma che nessun numero inferiore a L è un maggiorante di A, cioè L è il minimo dei maggioranti di A.

Proviamo la 2.

La $1)_i$ equivale a dire che l è un minorante di A, mentre la $2)_i$afferma che nessun numero superiore a l è un minorante di A, per cui l è il massimo dei minoranti di A.

Possiamo estendere la definizione di estremo superiore ed inferiore ad un insieme A non limitato ponendo rispettivamente $\sup A = +\infty$ se A non è limitato superiormente e $\inf A = -\infty$ se A non è limitato inferiormente.

<u>Esempio</u>: Se $A = (a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ è l'intervallo aperto di estremi a e b, allora l'insieme dei maggioranti di A è $\mathcal{M}(A) = [b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ /x \geq b\}$.

<u>Proposizione</u>: L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{1,2, \cdots\}$ è illimitato superiormente.

<u>Dimostrazione</u>: Se per assurdo ℕ fosse limitato superiormente, esiste finito $L = \sup \mathbb{N}$. Allora il numero $L - 1 < L$ non può essere un maggiorante di ℕ, per cui $\exists n > 0, n > L - 1$ per la $2)_s$. Quindi $n + 1 > l\ e\ n + 1 \in \mathbb{N}$, contro il fatto che, essendo L l'estremo superiore di ℕ, Lè un maggiorante di ℕ.

Osserviamo che risultando ℕ⊂ℚ⊂ℝ, poiché dalla proposizione precedente segue che ℕ è infinito, anche ℚ e ℝ lo sono, inoltre l'insieme ℕ è <u>ben ordinato</u> avendo elemento minimo, mentre sia ℚ che ℝ sono campi non bene ordinati secondo l'ordinamento naturale essendone entrambi privi.

L'insieme ℚ è <u>ovunque denso</u> o denso in sé secondo l'ordinamento naturale di ℚ perché comunque scelti due numeri razionali p e q esiste sempre almeno un razionale compreso tra i due. Infatti scelti p < q razionali, il centro $\frac{p+q}{2}$ dell'intervallo di estremi p e q è un numero razionale, cioè si ha p <$\frac{p+q}{2}$<q. Iterando il ragionamento si trova che i numeri razionali compresi devono essere in numero infinito in quanto se fossero in numero finito, vi dovrebbe essere un massimo elemento, assurdo perché tra tale numero razionale massimo e q non vi sarebbero razionali.

Tale infinità è poi numerabile perché, essendo un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, esso può essere solo finito o numerabile, per cui essendo infinito deve necessariamente essere numerabile.

L'insieme $\mathbb{Q}$ è però denso anche nell'insieme $\mathbb{R}$ perché tra due qualsiasi numeri reali $\alpha < \beta$ esistono infiniti razionali compresi. Infatti posto $\alpha = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2)$ sezione di $\mathbb{R}$, $\mathrm{A}_1$è la classe di razionali minorante di $\alpha$ (approssimazioni per difetto), mentre $\mathrm{A}_2$è la classe di razionali maggiorante di $\alpha$ (approssimazioni per eccesso), dove le classi sono contigue avendosi che $\forall \varepsilon > 0, \exists a_1 \in \mathrm{A}_1, \exists a_2 \in \mathrm{A}_2$ tali che $a_2 - a_1 < \varepsilon$. Analogamente per $\beta = (B_1, B_2)$. Ora $\alpha < \beta$ implica che , $\exists a_2 \in \mathrm{A}_2$, $\exists b_1 \in B_1$ tali che $\alpha < a_2 < b_1 < \beta$, da cui per l'ovunque densità di $\mathbb{Q}$, esisterà un'infinità numerabile di razionali compresi tra $a_2$ e $b_1$.

<u>L'insieme $\mathbb{R}$ è ovunque denso</u> poiché tra due numeri reali $\alpha$ e $\beta$ esiste sempre almeno un numero reale $\gamma$ compreso e quindi infiniti. Se $\gamma$ è razionale, per quello che abbiamo appena visto, l'affermazione è provata, nel caso invece che $\gamma$ è irrazionale, la sua esistenza è deducibile dal seguente ragionamento che permette di costruirlo. Considerato l'intervallo $[\alpha, \beta]$ e il suo punto centrale $\frac{\alpha+\beta}{2}$, vi sono due alternative:

1. Il centro dell'intervallo è irrazionale.
2. Il centro dell'intervallo è razionale.

Nel primo caso basta porre $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Nel secondo caso , scelto un qualsiasi numero irrazionale positivo $\zeta$, il punto $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\zeta}{\mathrm{n}}$ è a destra del centro dell'intervallo una volta scelto $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ in modo opportuno imponendo $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\zeta}{\mathrm{n}} < \beta \Leftrightarrow \frac{\zeta}{n} < \frac{\beta-\alpha}{2} \Leftrightarrow \mathrm{n} > \frac{2\zeta}{\beta-\alpha}$. Osservato allora che $\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\zeta}{\mathrm{n}}$ è irrazionale, si ha l'asserto.

<u>Proposizione</u>: Siano S e T due insiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ che siano rispettivamente classe minorante e classe maggiorante per cui si ha $s \leq t, \forall s \in S, \forall t \in T$. Allora S ha l'estremo superiore e T l'estremo inferiore soddisfacenti la diseguaglianza $\sup S \leq \inf T$.

<u>Dimostrazione</u>:

Per una proposizione precedente, essendo S limitato superiormente e T inferiormente, esistono i numeri reali sup S e inf T, inoltre ogni $t \in T$ è un maggiorante di S, per cui essendo sup S il minimo dei maggioranti, deve aversi $\sup S \leq t, \forall t \in T$. Ma tale relazione afferma che sup S è un minorante di T non potendosi avere $\inf T < \sup S$ perché, essendo inf T il minimo dei minoranti di T e sup S un minorante di T, deve essere necessariamente $\sup S \leq \inf T$.

Proposizione: Siano A e B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ e sia $A \subseteq B$, allora se B è limitato anche A è limitato e si ha $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

Dimostrazione:

Poiché B è limitato, esistono finiti $\inf B$ $e$ $\sup B$, massimo dei minoranti di B e minimo dei maggioranti di B; essendo per ipotesi che $A \subseteq B$, i minoranti e i maggioranti di B risultano esserlo anche per A, per cui allora $\forall x \in A, \inf B \leq x \leq \sup B$, donde si ha che anche A è limitato.

Si ha che $\inf B \leq \inf A$ perché il massimo dei minoranti di B è in particolare un minorante di A, essendo $A \subseteq B$, per cui non può superare il massimo dei minoranti di A. Infatti se altrimenti si avesse $\inf B > \inf A$, allora per la $2)_i$applicata a $\inf A$ deve $\exists x \in A$ tale che $x < \inf B$ e poiché tutti gli elementi di A sono elementi di B, $\inf B$ non sarebbe più un minorante di B.

Si ha $\inf A \leq \sup A$ perché in base alla definizione di estremo inferiore e superiore deve risultare $\inf A \leq x \leq \sup A, \forall x \in A$.

Infine si ha $\sup A \leq \sup B$, perché se si avesse $\sup A > \sup B$, in base alla $2)_s$ applicata a $\sup A$, $\exists x \in A$ tale che $x < \sup B$, da cui, essendo tutti gli elementi di A elementi di B, avremmo trovato un elemento $x \in B$ tale che $x < \sup B$, contro il fatto che, essendo $\sup B$ un minorante di B, è minore o uguale ad ogni elemento di B.

Proposizione: Se $(A, B)$ è una sezione di $\mathbb{R}$, allora $\sup A = \inf B$.

Dimostrazione:

Per una proposizione precedente a pag.16 deve aversi $\sup A \leq \inf B$. Non può aversi però $\sup A < \inf B$ perché altrimenti i punti dell'intervallo $(\sup A, \inf B)$ non apparterrebbero né ad A né a B, contro il fatto che per essere una sezione, $(A, B)$ deve essere un ricoprimento di $\mathbb{R}$.

Osservazione: La tesi $\sup A = \inf B$ equivale ad asserire che la coppia $(A, B)$ è costituita da insiemi contigui con il numero $\sup A = \inf B$ elemento di separazione.

Proposizione: Se $(a, b)$ è un intervallo aperto, allora si ha che $\inf(a, b) = a$, $\sup(a, b) = b$.

Dimostrazione:

Si ha $\sup(a, b) = b$, perché b è un maggiorante di $(a, b)$ che risulta il minimo dei maggioranti. Infatti un qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $a < \lambda < b$ non può essere un maggiorante di $(a, b)$ poiché avendosi $\lambda < \frac{\lambda + b}{2} < b$, esiste il numero $\frac{\lambda + b}{2}$ maggiore di $\lambda$ e minore di b in $(a, b)$.

Analogamente si prova che $\inf(a,b) = a$ essendo evidente che a è un minorante di $(a,b)$ che è anche il massimo dei minoranti in quanto $\forall\lambda < a$ minorante di $(a,b)$, si ha $\lambda < \frac{a+\lambda}{2} < a$, per cui $\frac{a+\lambda}{2}$ è un minorante di $(a,b)$ più grande di $\lambda$, donde $\lambda$ non è il massimo.

<u>Definizione</u>: Data una successione $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli non vuoti di $\mathbb{R}$, si dice che sono <u>nidificati</u> se $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta $I_{n+1} \subset I_n$.

<u>Nota</u>: Si tratta di considerare tali intervalli come una successione di scatole cinesi una inclusa nell'altra.

<u>Proposizione</u>: Data una successione $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di intervalli nidificati, si ha

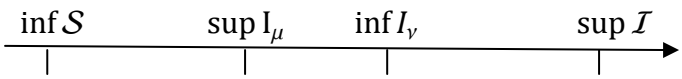
$$\inf I_n \leq \inf I_{n+1} \leq \sup I_{n+1} \leq \sup I_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Dimostrazione</u>: Per ogni fissato $n \in \mathbb{N}$ si ha l'asserto per la proposizione pag.16.

<u>Proposizione</u>: Sia $\{I_n\}$ una successione di intervalli limitati e nidificati dove $I_n = (\inf I_n, \sup I_n)$, quindi siano le successioni numeriche $\{\inf I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\sup I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se $\mathcal{I}$ ed $\mathcal{S}$ sono rispettivamente gli insiemi sostegno delle successioni $\{\inf I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\sup I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si ha $\sup \mathcal{I} \leq \inf \mathcal{S}$.

Detta $d_n = \sup I_n - \inf I_n$ l'ampiezza dell'intervallo $I_n$, si ha il segno di uguaglianza nella relazione precedente se e solo se la successione $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$è infinitesima.

<u>Dimostrazione</u>: Poiché in base all'ipotesi si ha $\inf I_1 \leq \cdots \leq \inf I_n \leq \sup I_n \leq \cdots \leq \sup I_1$, i numeri $\inf I_n$sono minoranti dell'insieme $\mathcal{S}$ i cui elementi sono i numeri $\sup I_n$, quindi considerato $\inf \mathcal{S}$, massimo dei minoranti di $\mathcal{S}$, deve aversi necessariamente $\inf I_n \leq \inf \mathcal{S}$. Se per assurdo si avesse $\sup \mathcal{I} > \inf \mathcal{S}$, in base alla $2)_s$ applicata a $\sup \mathcal{I}$dovrebbe esistere almeno un indice $\nu \in \mathbb{N}$ per cui $\inf I_\nu > \inf \mathcal{S}$, quindi per la $2)_i$applicata a $\inf \mathcal{S}$ dovrebbe esistere almeno un indice $\mu \in \mathbb{N}$ tale che $\inf \mathcal{S} \leq \sup I_\mu < \inf I_\nu$, assurdo poiché, per la proposizione alla pag.17, le classi $\{\inf I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\sup I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sono separate, con la prima classe minorante e la seconda maggiorante, per cui è impossibile la diseguaglianza $\sup I_\mu < \inf I_\nu$ per qualche $\nu$ e per qualche $\mu$.




Rimane da provare l'equivalenza $\sup \mathcal{I} = \inf \mathcal{S} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} d_n = 0$.

La condizione è necessaria. Infatti applicando la $2)_s$ a $\sup \mathcal{I}$ si ha che $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} \,/\, \sup \mathcal{I} - \frac{\varepsilon}{2} <$ infI$n$sup$\mathcal{I}$<infI$n$+ε2, mentre applicando la *2)i* a inf$\mathcal{S}$ si ha supIn<inf$\mathcal{S}$+ε2inf$\mathcal{S}$>supIn−ε2 , donde valendo l'ipotesi segue $\inf \mathrm{I}_n + \frac{\varepsilon}{2} > \sup \mathrm{I}_\mathrm{n} - \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \sup \mathrm{I}_\mathrm{n} - \inf \mathrm{I}_n < \varepsilon \Rightarrow \mathrm{d}_\mathrm{n} < \varepsilon$ cioè $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{d}_\mathrm{n} = 0$. Viceversa la condizione è sufficiente perché se si ha $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{d}_\mathrm{n} = 0$, allora $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / \forall n > \nu, \mathrm{d}_\mathrm{n} < \varepsilon$. Avendo già provato che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $\inf \mathrm{I}_\mathrm{n} \leq \sup \mathcal{I} \leq$ inf$\mathcal{S}$≤supIn, segue *(1) 0*≤inf$\mathcal{S}$−sup$\mathcal{I}$ ≤supIn−infI$n$=dninf$\mathcal{S}$−sup$\mathcal{I}$ <$\varepsilon$, da cui l'asserto per l'arbitrarietà di $\varepsilon$.

$nota^{(1)}$ Se a,b,c,d sono numeri reali, allora $a \leq b \leq c \leq d \Rightarrow c - b \leq d - a$. Infatti sottraendo – b dalla diseguaglianza doppia $b \leq c \leq d$, si ha $0 \leq c - b \leq d - b$, donde poiché $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$, si ha $c - b \leq d - b \leq d - a$.

<u>Proposizione</u>: Sia $\{\mathrm{I}_\mathrm{n}\}$ una successione di intervalli chiusi e limitati nidificati e siano le successioni numeriche $\{\inf \mathrm{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\sup \mathrm{I}_\mathrm{n}\}_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$. Se $\mathcal{I}$ ed $\mathcal{S}$ sono rispettivamente gli insiemi sostegno delle successioni $\{\inf \mathrm{I}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\sup \mathrm{I}_\mathrm{n}\}_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$, si ha $[\sup \mathcal{I}, \inf \mathcal{S}] = \bigcap_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_\mathrm{n} \neq \emptyset$, cioè esiste almeno un punto comune a ogni intervallo.

<u>Dimostrazione</u>:

Si ha $[\sup \mathcal{I}, \inf \mathcal{S}] \subseteq \bigcap_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_\mathrm{n}$ poiché

$x \in [\sup \mathcal{I}, \inf \mathcal{S}] \Rightarrow \inf \mathrm{I}_\mathrm{n} \leq \sup \mathcal{I} \leq \mathrm{x} \leq \inf \mathcal{S} \leq \sup \mathrm{I}_\mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{x} \in [\inf \mathrm{I}_n, \sup \mathrm{I}_\mathrm{n}] \, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$x \in \bigcap_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_\mathrm{n}$.

Si ha pure $\bigcap_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_\mathrm{n} \subseteq [\sup \mathcal{I}, \inf \mathcal{S}]$,perché $\forall x \in \bigcap_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_\mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{x} \in \mathrm{I}_\mathrm{n}, \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\inf \mathrm{I}_\mathrm{n} \leq \mathrm{x} \leq \sup \mathrm{I}_\mathrm{n}$, quindi per la proposizione precedente si ha $\inf \mathrm{I}_\mathrm{n} \leq \sup \mathcal{I} \leq \mathrm{x} \leq$ inf$\mathcal{S}$≤supInx∈[sup$\mathcal{I}$ ,inf$\mathcal{S}$], donde l'asserto.

<u>Osservazione</u>: Se gli intervalli non sono chiusi si può solo affermare che $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_n \subseteq \bigcap_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}} [\inf \mathrm{I}_\mathrm{n}, \sup \mathrm{I}_\mathrm{n}] = [\sup \mathcal{I}, \inf \mathcal{S}]$ per cui l'intersezione $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{I}_n$può essere vuota come ad esempio se $\mathrm{I}_\mathrm{n} = [1 - \frac{1}{\mathrm{n}}, 1)$ oppure $\mathrm{I}_\mathrm{n} = (0, \frac{1}{\mathrm{n}}]$ o anche se gli intervalli sono pure illimitati $\mathrm{I}_\mathrm{n} = [\mathrm{n}, +\infty)$.

<u>Proposizione</u>:

Nelle ipotesi del teorema precedente sia $\{\mathrm{I}_n\}$ una successione di intervalli chiusi e limitati $\mathrm{I}_n = [a_n, b_n]$, detto $d_n = b_n - a_n$il diametro dell'intervallo, supponiamo che la successione $\{d_n\}$ sia infinitesima per cui si abbia $\lim_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$. Allora esiste uno ed un sol punto comune ad ogni intervallo.

Dimostrazione: Che esiste almeno un punto ad ogni intervallo è dimostrato dalla proposizione precedente, per cui dobbiamo provare la sola unicità nelle ipotesi poste. Se per assurdo esistessero più punti comuni ad ogni intervallo allora, detti $\bar{x}$ e $\bar{\bar{x}}$ due di questi punti, deve essere $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| = \varepsilon > 0$. Dall'ipotesi $\lim_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$ segue per definizione di limite che in corrispondenza di un numero piccolo a piacere $\varepsilon > 0, \exists \nu > 0 \ / \ n \geq \nu, |b_n - a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow d_n < \varepsilon$, per cui deve esistere un intervallo $\mathrm{I}_\nu = [\mathrm{a}_\nu, \mathrm{b}_\nu]$ tale che la sua lunghezza $d_\nu$ sia minore della distanza $|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| = \varepsilon$ tra i due punti, contro il fatto che i due punti, appartenendo ad ogni intervallo della successione, devono appartenere anche a $\mathrm{I}_\nu$ e a tutti gli intervalli $\mathrm{I}_n$ per $n > \nu$.

Possiamo ora ritornare alla dimostrazione che l'intervallo unitario [0,1] è più che numerabile.

Se per assurdo l'intervallo [0,1] fosse numerabile, allora esistendo un'applicazione biiettiva tra $\mathbb{N}$ e [0,1], ogni elemento dell'intervallo sarebbe indiciabile costituendo una successione $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ i cui elementi, scritti come decimali illimitati contenenti un numero infinito di cifre diverse da 0 (delle due scritture con definitivamente nella parte decimale 0 e con definitivamente 9, scegliamo la seconda), si possono elencare nella tabella, dove $a_{ij} \in \{0,1, \cdots, 9\}$,

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & 0, a_{11}a_{12} \cdots a_{1n} \cdots \\ x_2 & = & 0, a_{21}a_{22} \cdots a_{2n} \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & & \\ x_n & = & 0, a_{n1}a_{n2} \cdots a_{nn} \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Usando il procedimento diagonale di Cantor, ci costruiamo il numero $x = 0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ dove $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n \neq a_{nn}$ , per cui $x \neq x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Questo implica che $x \notin [0,1]$, e che l'applicazione determinante la successione non è suriettiva, contro l'ipotesi della biiettività dell'applicazione.

Consideriamo ora un generico intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ ed osserviamo che per $n \in \mathbb{N}$

si ha $\begin{cases} a \leq b \\ n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b-a}{n} \geq 0 \\ n(b-a) \geq b-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{b-a}{n} \geq a \\ a + \frac{b-a}{n} \leq b \end{cases} \Rightarrow a \leq a + \frac{b-a}{n} \leq b \Rightarrow a + \frac{b-a}{n} \in [a, b].$

La successione di punti di $[a, b]$, $\left\{\mathrm{a} + \frac{\mathrm{b-a}}{\mathrm{n}}\right\}_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$, stabilisce l'applicazione iniettiva tra $\mathbb{N}$ e l'intervallo $[a, b]$

$\mathrm{n} \in \mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{f}} \mathrm{f(n)} = \mathrm{x_n} = a + \frac{b-a}{n} \in [a, b]$ , in quanto l'iniettività di f segue da $f(n) = f(m) \Rightarrow a + \frac{b-a}{n} = a + \frac{b-a}{m} \Rightarrow \mathrm{n} = \mathrm{m}$, mentre f è un'applicazione perché $n = m \Rightarrow \mathrm{f(n)} = \mathrm{f(m)}$. Allora l'intervallo $[a, b]$, contenendo un insieme numerabile, ha potenza non inferiore al numerabile.

Il fatto rilevante è che l'intervallo $[a, b]$ ha potenza maggiore del numerabile, poiché

Teorema di Cantor:

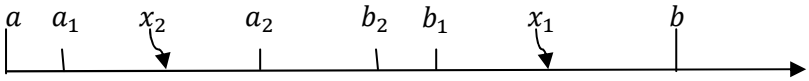
La potenza di ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ è maggiore del numerabile.

Dimostrazione:

Dimostrare il teorema significa far vedere che non possono esistere applicazioni biiettive tra $\mathbb{N}$ e $[a,b]$, ovvero suriettive, esistendo applicazioni iniettive tra $\mathbb{N}$ e $[a,b]$.

Supponiamo per assurdo che esista un'applicazione biiettiva $f: n \in \mathbb{N} \to f(n) = x_n \in [a,b]$.

Per n = 1 otteniamo il punto $f(n) = x_1 \in [a,b]$. Essendo $\mathbb{R}$ ovunque denso, è possibile scegliere due numeri reali $a_1 < b_1$, di modo che $\mathrm{I}_1 = [\,a_1, b_1] \subset [a,b]$ e $\mathrm{x}_1 \notin [\,a_1, b_1]$. Quindi per n = 2 consideriamo il punto $f(2) = x_2$ e scegliamo due numeri reali $a_2 < b_2$ in modo che l'intervallo $\mathrm{I}_2 = [a_2, b_2]$ risulti incluso in $\mathrm{I}_1$, cioè si abbia $\mathrm{I}_2 \subset \mathrm{I}_1$, e contemporaneamente sia $x_2 \notin \mathrm{I}_2$.

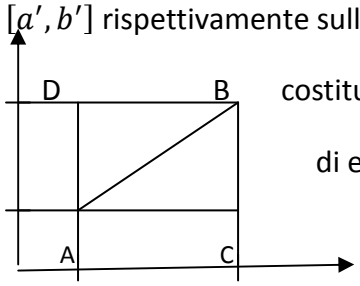



Costruiamo per ricorrenza la successione d'intervalli $\{\mathrm{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\begin{cases} a_1 < b_1 & \text{tale che} \quad [\,a_1, \mathrm{b}_1] \subset [a,b], \quad \text{con } \mathrm{x}_1 \notin [\,a_1, \mathrm{b}_1] \\ \forall n \in \mathbb{N} - \{1\},\ a_n < b_n & \text{tale che } [a_\mathrm{n}, \mathrm{b}_\mathrm{n}] \subset [a_{\mathrm{n}-1}, \mathrm{b}_{\mathrm{n}-1}], \quad \text{con } \mathrm{x}_\mathrm{n} \notin [a_\mathrm{n}, \mathrm{b}_\mathrm{n}] \end{cases}$$

Per la proposizione di pag.20 si ha $\bigcap_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}} \mathrm{I}_\mathrm{n} \neq \emptyset$, donde la successione d'intervalli $\{\mathrm{I}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deve avere almeno un punto comune $x \in [a,b]$. Abbiamo trovato un punto dell'intervallo $[a,b]$ che non è immagine di alcun $n \in \mathbb{N}$ tramite l'applicazione f, che non essendo suriettiva, non è biiettiva, contro l'ipotesi.

Proviamo ora che tutti gli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ non costituiti da un unico numero reale sono equipotenti. Nel piano cartesiano xoy prendiamo gli l'intervalli chiusi e limitati $[a,b]$ e $[a', b']$ rispettivamente sull'asse x e sull'asse y, quindi consideriamo il dominio rettangolare ABCD



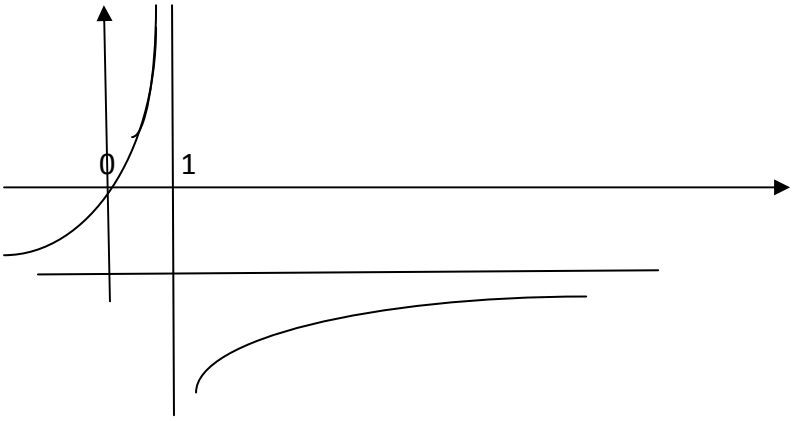

costituito da tutti i punti del piano $(x,y) \in [a,b] \times [a', b']$ e la diagonale di estremi $\mathrm{A}(\mathrm{a}, \mathrm{a}')$ e $\mathrm{B}(\,\mathrm{b},\ \mathrm{b}')$ definita dall' equazione

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a'}{b'-a'} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} a \le x \le b \\ a' \le y \le b' \end{matrix} .$$

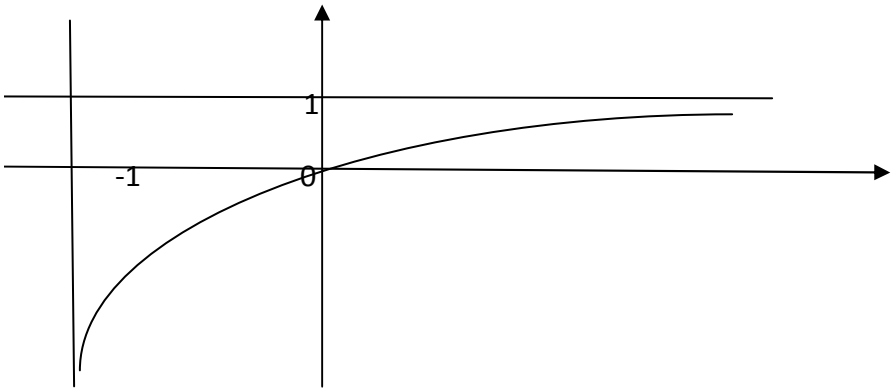
La corrispondenza dedotta dall'equazione precedente $x \in [a,b] \to y = \frac{\mathrm{b}'-\mathrm{a}'}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}(x-a) + a'$ è biunivoca essendo la funzione strettamente crescente, il che assicura l'equipotenza.

Dall'ovunque densità di $\mathbb{R}$, segue che ogni intervallo $(a,b)$ di $\mathbb{R}$ aperto e limitato contiene un intervallo $[c,d] \subset (a,b)$ chiuso con estremi distinti, per cui si ha per la cardinalità di $(a,b)$ che $|(a,b)| \ge |[c,d]|$ . Ma anche deve esistere un intervallo $[c', d'] \neq \emptyset$ chiuso e limitato tale che $(a,b) \subset [c', d']$, da cui si ottiene per la cardinalità $|(a,b)| \le |[c', d']|$. Allora poiché si è visto che $|[c,d]| = |[c', d']|$ , da $|(a,b)| \le |[c,d]|$ e $|(a,b)| \ge |[c,d]|$, segue per il teorema di Cantor-Bernstein che $|(a,b)| = |[c,d]|$. Quindi ogni intervallo non vuoto di $\mathbb{R}$ aperto e limitato è equivalente ad un qualunque intervallo chiuso e limitato.

Consideriamo ora la funzione omografica $y = \frac{x}{1-x}$ definita in $\mathbb{R} - \{1\}$ e a valori in $\mathbb{R} - \{-1\}$, la sua restrizione all'intervallo $(0,1)$ $\quad x \in (0,1) \rightarrow y = \frac{x}{1-x} \in \mathbb{R}^+$ ivi strettamente crescente, risulta biunivoca di $(0,1)$ su $\mathbb{R}^+$, donde avendosi $|(0,1)| = |\mathbb{R}^+|$, il semiasse positivo delle ascisse e l'intervallo aperto $(0,1)$ hanno la stessa potenza.




Analogamente applicando la simmetria centrale rispetto all'origine degli assi $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$, si ottiene la funzione omografica $y = \frac{x}{1+x}$ definita in $\mathbb{R} - \{-1\}$ e a valori in $\mathbb{R} - \{-1\}$, la cui restrizione all'intervallo $(-1,0)$, $x \in (-1,0) \rightarrow y = \frac{x}{1+x} \in \mathbb{R}^-$ essendo strettamente crescente è biunivoca, da cui si ricava che $|(-1,0)| = |\mathbb{R}^-|$.




Poiché si può dimostrare che se un insieme A è equipotente a un insieme A' e un insieme B è equipotente a un insieme B', allora l'insieme $A \cup B$ è equipotente all'insieme $A' \cup B'$, applicando tale proposizione agli insiemi $(0,1)$ e $\mathbb{R}^+$, $(-1,0)$ e $\mathbb{R}^-$, si ha $|\mathbb{R}| = |(-1,1)|$ , cioè l'insieme dei numeri reali ha la stessa potenza dell'intervallo $(-1,1)$ e quindi a una qualsiasi parte di $\mathbb{R}$ contenente un intervallo aperto non vuoto, ossia di un intervallo chiuso di estremi distinti.

Tale cardinalità si dice potenza del continuo. Che la potenza del continuo sia la minima maggiore del numerabile abbiamo già detto che costituisce l'ipotesi del continuo, potendosi accettare o rifiutare tale ipotesi senza creare contraddizioni.