*Liceo G. B. Vico - Napoli*

# *Sulla monotonia delle funzioni reali di una variabile reale*

*Prof. Giuseppe Caputo*

Premetto due teoremi come prerequisiti necessari per la comprensione di quanto verrà esposto nel seguito.

Teorema della permanenza del segno

Data una funzione f(x) definita in un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ dei numeri reali, convergente ad un numero reale non nullo l per $x \to c$ , con $c \in D(X)$ punto di accumulazione di X, allora esiste un opportuno intorno di c in cui f(x) ha lo stesso segno di l. Il teorema è estendibile nell'insieme ampliato dei numeri reali $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.In sintesi,

1) **se** $\lim_{x \to c} f(x) = l \neq 0$**, allora** $\begin{cases} l > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \ definitivamente\ intorno\ a\ c \\ l < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \ definitivamente\ intorno\ a\ c \end{cases}$

2) **se** $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$**, allora** $\begin{cases} l = +\infty \Rightarrow f(x) > 0 \ definitivamente\ intorno\ a\ c \\ l = -\infty \Rightarrow f(x) < 0 \ definitivamente\ intorno\ a\ c \end{cases}$

Dimostrazione:

Proviamo 1.

Per ipotesi si ha $\lim_{x \to c} f(x) = l \neq 0$, quindi per definizione $\forall \epsilon > 0, \exists \mathrm{I}(c)$ intorno del punto c tale che $\forall x \in (\mathrm{I(c)} - \{c\}) \cap X$ risulti $|f(x) - l| < \epsilon$, da cui, posto $\epsilon = |l|$ , segue $l - |l| < f(x) < |l| + l$. Si ha allora $\begin{cases} l > 0 \Rightarrow |l| = l \Rightarrow 0 < f(x) \\ l < 0 \Rightarrow |l| = -l \Rightarrow f(x) < 0 \end{cases}$ , cioè l'asserto.

Proviamo 2.

Se $l = +\infty$, allora per definizione $\forall k > 0, \exists I(c) / \ \forall x \in (\mathrm{I(c)} - \{c\}) \cap X$ si ha $f(x) > k \Rightarrow f(x) > 0$. Se invece $l = -\infty$, segue per definizione che $\forall k > 0, \exists I(c) / \ \forall x \in (\mathrm{I(c)} - \{c\}) \cap X, f(x) < -k \Rightarrow f(x) < 0$.■

Mentre il teorema della permanenza del segno assicura che definitivamente intorno a c la funzione f(x) assume il segno del suo limite non nullo in c, il seguente teorema del confronto inverte tale teorema, assicurando che se una funzione f(x) regolare in c con limite l assume definitivamente intorno a c segno costante, allora il suo limite l ha il segno di f. Più precisamente se intorno a c f è non negativa (rispettivamente non positiva), allora anche il suo limite in c lo è.

Teorema del confronto

Se f(x) ha $\lim_{x\Rightarrow c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ed $\exists I(c)/\ \forall x \in (\mathrm{I(c)} - \{c\}) \cap X/\ f(x) \geq 0$ [risp. $f(x) \leq 0$], allora pure $l \geq 0$ $[risp. l \leq 0]$. In sintesi

**Definitivamente intorno a c** $\boldsymbol{f(x) \geq 0 \Rightarrow l \geq 0}$

**Definitivamente intorno a c** $\boldsymbol{f(x) \leq 0 \Rightarrow l \leq 0}$

Se la funzione $f(x)$ diverge con $l = \infty$, allora

**Definitivamente intorno a c** $\boldsymbol{f(x) \geq 0 \Rightarrow l = +\infty}$

**Definitivamente intorno a c** $\boldsymbol{f(x) \leq 0 \Rightarrow l = -\infty}$

Dimostrazione:

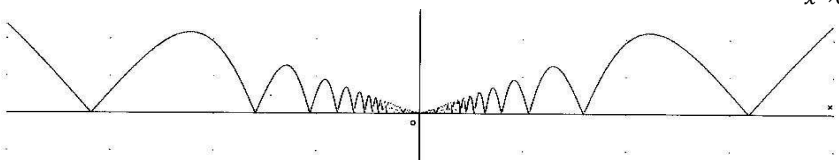
Dimostriamo nel caso che $l \in \mathbb{R}$.

Supposto che intorno a c si abbia $f(x) \geq 0$, non può essere $l < 0$ , perché in base al teorema della permanenza del segno la funzione f(x) dovrebbe assumere definitivamente intorno a c il segno di $l$, cioè essere $f(x) < 0$, contro l'ipotesi. Analogamente nel caso che $f(x) \leq 0$, se per assurdo fosse $l > 0$, definitivamente intorno a c sarebbe $f(x) > 0$, contro l'ipotesi.

Dimostriamo nel caso che $l = \infty$ .Essendo $\lim_{x\Rightarrow c} f(x) = \infty$, si ha $\forall k > 0, \exists I(c)/\forall x \in (I(c) - \{c\}) \cap X, |f(x)| > k \Leftrightarrow f(x) < -k \vee \mathrm{f(x)} > k$ e poiché per ipotesi $\mathrm{f(x)} \geq 0$ definitivamente intorno a c, segue $\mathrm{f(x)} > k$, ovvero per definizione $\lim_{x\Rightarrow c} f(x) = +\infty$, mentre se per ipotesi $\mathrm{f(x)} \leq 0$ definitivamente intorno a c, segue $f(x) < -k$, ossia per definizione $\lim_{x\Rightarrow c} f(x) = -\infty$.■

Esempio: La funzione $f(x) = \left|xsin\left(\frac{1}{x}\right)\right|$ è definitivamente non negativa intorno all'origine in cui non è definita in quanto $f(x) = 0 \Leftrightarrow sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = k\pi\ , k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{1}{k\pi}$ e $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{k\pi}$.

In conformità del teorema della permanenza del segno si ha $l \geq 0$ poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.



Osservazione:

Anche nel caso che definitivamente intorno a c $f(x) > 0$, si ha sempre $\mathrm{l} \geq 0$, e così pure se definitivamente intorno a c $f(x) < 0$, si ha sempre $\mathrm{l} \leq 0$. cioè

1) **definitivamente intorno a c** $\boldsymbol{f(x) > 0 \Rightarrow l \geq 0}$
2) **definitivamente intorno a c** $\boldsymbol{f(x) < 0 \Rightarrow l \leq 0}$

Se la funzione $f(x)$ diverge con $l = \infty$, allora

3) **Definitivamente intorno a c** $\boldsymbol{f(x) > 0 \Rightarrow l = +\infty}$
4) **Definitivamente intorno a c** $\boldsymbol{f(x) < 0 \Rightarrow l = -\infty}$

Dimostrazione:

Proviamo 1. Se per assurdo fosse $l < 0$ allora per il teorema della permanenza del segno si avrebbe definitivamente intorno a c $f(x) < 0$, contro l'ipotesi.

Proviamo 2. Se per assurdo fosse $l > 0$ allora per il teorema della permanenza del segno si avrebbe definitivamente intorno a c $f(x) > 0$, contro l'ipotesi.

Proviamo 3. Essendo $\lim_{x \Rightarrow c} f(x) = \infty$, si ha $\forall k > 0, \exists I(c) / \forall x \in (I(c) - \{c\}) \cap X, |f(x)| > k \Leftrightarrow f(x) < -k \vee \mathrm{f(x)} > k$ e poiché per ipotesi $\mathrm{f(x)} > 0$ $definitivamente\ intorno\ a\ c$, segue $\mathrm{f(x)} > k$, ovvero per definizione $\lim_{x \Rightarrow c} f(x) = +\infty$.

Proviamo 4. Essendo $\lim_{x \Rightarrow c} f(x) = \infty$, si ha $\forall k > 0, \exists I(c) / \forall x \in (I(c) - \{c\}) \cap X, |f(x)| > k \Leftrightarrow f(x) < -k \vee \mathrm{f(x)} > k$ e poiché per ipotesi $\mathrm{f(x)} < 0$ $definitivamente\ intorno\ a\ c$, segue $\mathrm{f(x)} < -k$, ovvero per definizione $\lim_{x \Rightarrow c} f(x) = -\infty$.

Esempio:

La funzione $f(x) = x^2$ intorno a $c = 0$ è definitivamente positiva, tranne che nell'origine, ma $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$. Analogamente $f(x) = -x^2$ è definitivamente negativa intorno all'origine con $\lim_{x \to 0} -x^2 = 0$. Possiamo quindi dire che

1) **definitivamente intorno a c** $\boldsymbol{f(x) > 0 \neq \Rightarrow l > 0}$
2) **definitivamente intorno a c** $\boldsymbol{f(x) < 0 \neq \Rightarrow l < 0}$

Le funzioni monotone sono le funzioni crescenti, decrescenti, strettamente crescenti, strettamente decrescenti.

Definizione : La funzione f(x) definita nell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice:

**crescente in X** se $\forall x', x'' \in X, x' < x'' \Rightarrow f(x') \leq f(x'')$.

**strettamente crescente in X** se $\forall x', x'' \in X, x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$.

**decrescente in X** se $\forall x', x'' \in X, x' < x'' \Rightarrow f(x') \geq f(x'')$.

**strettamente decrescente in X** se $\forall x', x'' \in X, x' < x'' \Rightarrow f(x') > f(x'')$.

Proposizione 1 : **f è crescente in X** $\Leftrightarrow \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} \geq 0$

**f è strettamente crescente in X** $\Leftrightarrow \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} > 0$

Dimostrazione : Se f è crescente allora dalla definizione $\forall x', x'' \in X, x' < x'' \Rightarrow f(x') \leq f(x'') \Leftrightarrow$

$x'' - x' > 0 \Rightarrow f(x'') - f(x') \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} \geq 0.$

Se f è strettamente crescente allora dalla definizione $\forall x', x'' \in X, x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'') \Leftrightarrow$

$x'' - x' > 0 \Rightarrow f(x'') - f(x') > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} > 0.$■

Nota: Dire quindi che f è crescente equivale ad affermare, escluso il caso in cui $f(x') = f(x'')$ , che gli incrementi della variabile dipendente e indipendente hanno lo stesso segno. Se f è strettamente crescente gli incrementi della variabile dipendente e indipendente hanno sempre lo stesso segno.

Proposizione 2 : **f è decrescente in X** $\Leftrightarrow \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} \leq 0$

**f è strettamente decrescente in X** $\Leftrightarrow \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} < 0$

Dimostrazione : Se f è decrescente allora dalla definizione $\forall x', x'' \in X, x' < x'' \Rightarrow f(x') \geq f(x'') \Leftrightarrow$

$x'' - x' > 0 \Rightarrow f(x'') - f(x') \leq 0 \Leftrightarrow \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} \leq 0.$

Se f è strettamente decrescente allora dalla definizione $\forall x', x'' \in X, x' < x'' \Rightarrow f(x') > f(x'') \Leftrightarrow$

$x'' - x' > 0 \Rightarrow f(x'') - f(x') < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} < 0.$■

Nota: Dire quindi che f è decrescente equivale ad affermare, escluso il caso in cui $f(x') = f(x'')$ , che gli incrementi della variabile dipendente e indipendente hanno segno opposto. Se f è strettamente decrescente, gli incrementi della variabile dipendente e indipendente hanno sempre segno opposto.

La seguente definizione dà una proprietà locale di una funzione f intorno ad un punto $x_0 \in X \cap D(X)$ di accumulazione di X appartenente a X , confrontando il valore assunto da f in $x_0$ con quelli assunti vicino a $x_0$ in un opportuno intorno $\mathrm{I}(x_0)$ di $x_0$.

Definizione : La funzione f(x) definita nell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice:

**crescente nel punto $x_0$** se $\exists \mathrm{I}(x_0) / \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \cap X \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \end{cases}$

**strettamente crescente nel punto $x_0$** se $\exists \mathrm{I}(x_0) / \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \cap X \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases}$

**decrescente nel punto $x_0$** se $\exists \mathrm{I}(x_0) / \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \cap X \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \end{cases}$

**strettamente decrescente nel punto $x_0$** se $\exists \mathrm{I}(x_0) / \forall x \in \mathrm{I}(x_0) \cap X \Rightarrow \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{cases}$

Considerati gli incrementi $\Delta f \ e \ \Delta x$ delle variabili dipendente e indipendente relativi al punto $x_0$,, vale la seguente proposizione:

Proposizione 3: Definitivamente intorno a $\boldsymbol{x_0}$ si ha:

1. **f è crescente nel punto $x_0 \Leftrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$**
2. **f è strettamente crescente nel punto $x_0 \Leftrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$**
3. **f è decrescente nel punto $x_0 \Leftrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$**
4. **f è strettamente decrescente nel punto $x_0 \Leftrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$**

Dimostrazione :

1. Se f è crescente nel punto $\boldsymbol{x_0}$, dalla definizione segue che definitivamente intorno a $\boldsymbol{x_0}$il rapporto incrementale è non negativo, avendo numeratore e denominatore di segno concorde, tranne il caso in cui il numeratore si annulla, e viceversa.
2. Se f è strettamente crescente nel punto $\boldsymbol{x_0}$, dalla definizione segue che definitivamente intorno a $\boldsymbol{x_0}$il rapporto incrementale è positivo, avendo numeratore e denominatore di segno concorde e viceversa.
3. Se f è decrescente nel punto $\boldsymbol{x_0}$, dalla definizione segue che definitivamente intorno a $\boldsymbol{x_0}$il rapporto incrementale è non positivo, avendo numeratore e denominatore di segno discorde, tranne il caso in cui il numeratore si annulla, e viceversa.

4. Se f è strettamente decrescente nel punto $\boldsymbol{x_0}$, dalla definizione segue che definitivamente intorno a $\boldsymbol{x_0}$il rapporto incrementale è negativo avendo numeratore e denominatore di segno discorde e viceversa.■

La definizione di funzione monotona in un intorno del punto $\boldsymbol{x_0}$è uguale a quella di funzione monotona in un insieme, ove si sostituisca all'insieme di definizione X l'intorno $\mathrm{I}(\boldsymbol{x_0})\subseteq \mathrm{X}$. Per tali funzioni continua a valere la proposizione 2. Ovviamente le funzioni monotone nell'intorno di un punto $\boldsymbol{x_0}$ sono monotone nel punto $\boldsymbol{x_0}$. Infatti:

Proposizione 4:

$$\textbf{f monotona in } \mathrm{I}(\mathrm{x_0}) \Rightarrow \textbf{f monotona in } \mathrm{x_0}$$

Dimostrazione : Ci limitiamo a provare che f crescente in $\mathrm{I}(\mathrm{x_0}) \Rightarrow$ f crescente in $\mathrm{x_0}$, essendo la dimostrazione analoga negli altri casi.

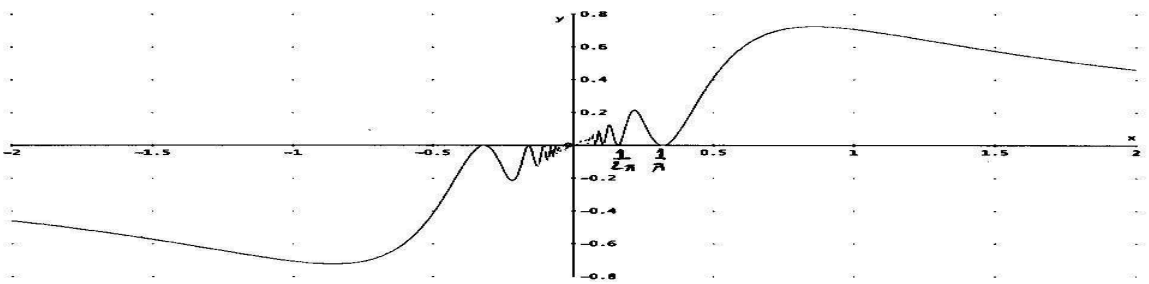
Se f è crescente in $\mathrm{I}(\mathrm{x_0})$, allora dalla definizione segue che, posto $x' = x =, \mathrm{x}'' = \mathrm{x_0}$, $x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$, mentre se $x' = x_0, x'' = x,\ x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \leq f(x)$, cioè la funzione f è crescente in $x_0$.■

Osservazione:

Il teorema non si inverte, potendo essere benissimo una funzione monotona in un punto senza necessariamente esserlo definitivamente intorno ad esso. Facciamo vedere ad esempio che f crescente in $\mathrm{x_0} \not\Longleftrightarrow$f crescente in $I(\mathrm{x_0})$. Come contro esempio si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} xsen^2\frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0 \qquad\quad , x = 0 \end{cases}$$

che nel punto $\mathrm{x_0} = 0$ ha un punto di crescenza in quanto $\begin{cases} f(x) \leq f(0), x < 0 \\ f(x) \geq f(0), x > 0 \end{cases}$, ma non esiste alcun intorno dell'origine in cui f sia crescente, ovvero per cui $\forall x', x'' \in I(0) \Rightarrow f(x') \leq f(x'')$. Infatti, comunque fissato un intorno dell'origine 0, la funzione si annulla per $x = \frac{1}{k\pi}$, al variare di k tra gli interi non nulli e per $x \neq \frac{1}{k\pi}$ si ha $\begin{cases} f(x) > 0, x > 0 \\ f(x) < 0, x < 0 \end{cases}$. Si ricava allora che,, la funzione non ha nessun carattere di monotonia. essendoci infiniti punti in cui f si annulla e in cui è diversa da zero. Lo studio della funzione porta al seguente grafico



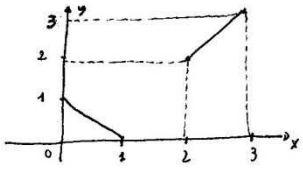
Consideriamo ora il caso particolare che l'insieme X sia chiuso e denso in sé, ovvero coincide col suo derivato, per cui $X = D(X)$ .Allora ogni punto di X è di accumulazione per X e non ci sono punti isolati, contenendo X la propria frontiera. Un insieme siffatto si dice perfetto. Un esempio d'insieme perfetto può essere l'unione di uno o più intervalli chiusi.

Proposizione 5:

Se X è un insieme perfetto, si ha:

$$\boldsymbol{f\ monotona\ in\ X \Rightarrow\ f\ monotona\ in\ ogni\ punto\ di\ X}$$

Dimostrazione : Fissato comunque un punto $x_0 \in X$, tale punto è di accumulazione per X, essendo questo perfetto per ipotesi, per cui in ogni intorno $\mathrm{I}(\mathrm{x}_0) \subseteq \mathrm{X}$ di $x_0$ cadono punti di X distinti da $x_0$. Essendo per ipotesi f monotona in X, lo è in particolare in $\mathrm{I}(\mathrm{x}_0)$ e quindi in base alla proposizione 4, in $\mathrm{x}_0$.■

Osservazione: Il teorema non s'inverte, potendo essere una funzione monotona in ogni punto di X senza esserlo in X. A tale scopo consideriamo l'insieme perfetto $X = [\![0,1]\!] \cup [2,3]$, in cui ogni punto è di accumulazione di punti interni, e la funzione $f(x) = \begin{cases} 1-x, x \in [0,1] \\ x, x \in [2,3] \end{cases}$ avente il seguente grafico. 

Comunque scelto il punto $x_0$, è possibile trovare un intorno del punto tutto contenuto nell'insieme X in cui la funzione f è monotona. Ad esempio se $x_0 \in [0,1], \exists \mathrm{I}(\mathrm{x}_0) \subseteq [0,1] / \forall x \in \mathrm{I}(\mathrm{x}_0)$ f è strettamente decrescente, se invece $x_0 \in [2,3], \exists \mathrm{I}(\mathrm{x}_0) \subseteq [2,3] / \forall x \in \mathrm{I}(\mathrm{x}_0)$ f è strettamente crescente. In X però la funzione non è monotona perché se x' e x'' si scelgono in entrambi in $[0,1]$, allora $\mathrm{x}' < \mathrm{x}'' \Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}') > f(\mathrm{x}'')$, se entrambi in $[2,3]$ allora $\mathrm{x}' < \mathrm{x}'' \Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}') < f(\mathrm{x}'')$, infine se x' in $[0,1]$ e x'' in $[2,3]$ allora $\mathrm{x}' < \mathrm{x}'' \Rightarrow \mathrm{f}(\mathrm{x}') < f(\mathrm{x}'')$. Se poi X non è perfetto, a maggior ragione il teorema non s'inverte.

Come contro esempio si consideri la funzione $y = tgx$ definita in $X = \mathbb{R}\text{-}\cup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, che essendo l'unione di un'infinità numerabile di insiemi aperti è un aperto, quindi non chiuso e non perfetto. La restrizione della funzione tangente al generico intervallo $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ , $k \in \mathbb{Z}$, è strettamente crescente, ma non è così per la funzione in tutto il suo insieme di definizione X, come si può verificare per $x' \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ , $x'' \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right) \Rightarrow tgx' > tgx''$.

Nel caso particolare che l'insieme X sia un singolo intervallo, non necessariamente chiuso o limitato, il teorema s'inverte.

Proposizione 6: Se Se la funzione f(x) è definita in un intervallo aperto $(a, b)$ limitato o non, si ha:

**f monotona in $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ $\Leftrightarrow$ f è monotona in ogni punto di $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$**

Dimostrazione : Ci limitiamo a provare il caso in cui f sia crescente in (a, b).

La condizione è necessaria.

Infatti se f è crescente in (a, b), comunque fissato un punto $x_0 \in (a, b)$, per la proposizione 1, il rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0, \ \forall x \in (a, b)$ quindi, in base alla proposizione 3, ciò è sufficiente ad assicurare che f è crescente in $x_0$. Nel caso che l'intervallo $(a, b)$non sia limitato, stante l'ipotesi, f risulta anche monotona in ogni intervallo limitato contenuto in $(a, b)$ e quindi in ogni suo punto per quanto sopra dimostrato.

La condizione è sufficiente.

Supposto quindi f crescente in ogni punto di (a, b), se per assurdo f non fosse crescente in tutto (a, b), allora proviamo che esiste almeno un punto $x_0 \in (a, b)$ in cui la funzione non è crescente; ciò contraddice l'ipotesi, da cui il teorema. Se quindi f non è crescente in (a, b) è falso che $\forall x', x'' \in X, x' < x'' \Rightarrow f(x') \leq f(x'')$, per cui devono esistere(*) almeno due punti dell'intervallo (a, b) $a_1, b_1$ con $a_1 < b_1$ per cui risulti $f(a_1) > f(b_1)$. Considerato l'intervallo $[a_1, b_1]$ e indicato con $c_1$ il suo punto medio, per cui si ha $[a_1, b_1] = [a_1, c_1] \cup [c_1, b_1]$, non può aversi $f(a_1) \leq f(c_1) \leq f(b_1)$, poiché $f(a_1) > f(b_1)$.Deve verificarsi allora una delle due eventualità $f(a_1) > f(c_1)$ oppure $f(c_1) > f(b_1)$.

Sia allora $[a_2, b_2]$ uno dei due intervalli $[a_1, c_1], [c_1, b_1]$ in cui l'ordinata di f calcolata nell'estremo sinistro è maggiore di quella calcolata nell'estremo destro, quindi iteriamo il ragionamento costruendo la successione d'intervalli nidificati(**) $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$, strettamente decrescente rispetto alla relazione d'inclusione.

Detta $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ , dove $\delta_n = b_n - a_n$, la successione dei diametri di tali intervalli, notiamo che ognuno di essi è il doppio del successivo, cioè $\delta_1 = 2\delta_2, \cdots, \delta_n = 2\delta_{n-1} \Rightarrow \delta_n = \frac{1}{2}\delta_{n-1} = \frac{1}{2^2}\delta_{n-2} = \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}\delta_1$.

Avendosi che $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta_1 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, la successione $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima., per cui la successione di punti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{b_n - \delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ crescente e la successione di punti $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n + \delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente, hanno uguale limite $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} \delta_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Posto $x_0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, necessariamente deve essere $a_n \leq x_0 \leq b_n$, poiché $a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \leq b_n$, essendo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ crescente e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decrescente, entrambe convergenti a $x_0$(***).

Nel generico intervallo $[a_n, b_n]$ della successione si ha $f(a_n) > f(b_n)$ e, poiché $x_0 \in [a_n, b_n]$, quest'ultimo si può scrivere come $[a_n, x_0] \cup [x_0, b_n]$, inoltre non può essere $f(a_n) \leq f(x_0) \leq f(b_n)$, in quanto appunto $f(a_n) > f(b_n)$. Necessariamente si presenta allora almeno una delle due eventualità $f(a_n) > f(x_0)$ oppure $f(x_0) > f(b_n)$.

Posto allora $I_n^-(x_0) = [a_n, x_0]$ e $I_n^+(x_0) = [x_0, b_n]$, quindi considerate le successioni di intorni sinistri e destri $\{I_n^-(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{I_n^+(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, si verifica almeno una delle due eventualità $\begin{cases}\forall I_n^-(x_0), \exists x \in I_n^-(x_0)/\ f(x_0) < f(x) \\ \forall I_n^+(x_0), \exists x \in I_n^+(x_0)/ f(x_0) > f(x)\end{cases}$, da cui si evince che la funzione f non è crescente nell'intorno $I_n(x_0) = I_n^-(x_0) \cup I_n^+(x_0)$ , $\forall n \in \mathbb{N}$ , e quindi non è crescente in $x_0$ non esistendo alcun intorno di $x_0$ in cui si verifichi $\begin{cases}\forall x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ \forall x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)\end{cases}$. Ciò contraddice l'ipotesi, donde l'asserto.

Nel caso poi che l'intervallo $(a, b)$non sia limitato, per quanto appena provato, la monotonia in ogni punto di $(a, b)$implica la monotonia in ogni intervallo limitato contenuto in $(a, b)$, da cui la monotonia in tutto $(a, b)$.■

Osservazione: Una dimostrazione alternativa della sufficienza del teorema è la seguente.

Supposto ad esempio che f sia strettamente crescente in ogni punto $x_0$ di $(a, b)$, allora $\exists \mathrm{I}(\mathrm{x}_0)$ / $\forall x \in \mathrm{I}(\mathrm{x}_0) \cap (a, b)$ , $\begin{cases}x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)\end{cases}$, per cui essendo $I(x_0) = I^-(x_0) \cup I^+(x_0)$, in particolare si ha che $\forall x \in I^+(x_0) \cap (a, b)$, $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$, quindi proviamo che f è strettamente crescente nell'intervallo $[x_0, b)$. Detto $\overline{x} \in I^+(x_0) \cap (a, b)$ un punto dell'intervallo che cade in tale intorno, allora deve aversi $\overline{x} > x_0 \Rightarrow f(\overline{x}) > f(x_0)$ ed anche $f(x) > f(x_0), \forall x \in (x_0, \overline{x}]$.

Considerato l'insieme limitato di numeri reali $\mathcal{A} = \{\overline{x} \in I^+(x_0) \cap (a, b)/\forall x \in (x_0, \overline{x}], f(x) > f(x_0)\}$ e detto $s = sup\mathcal{A}$il suo estremo superiore, si ha che $\forall x \in (x_0, s]$, $f(x) > f(x_0)$.

Infatti per $x \in \mathcal{A}$ e $x < s$, in base alla 2 [a] proprietà dell'estremo superiore, segue che $\exists \overline{x} \in \mathcal{A}/\ x < \overline{x} \leq s$, quindi avendosi $\forall x \in (x_0, \overline{x}], f(x) > f(x_0)$, segue che quando $x < s$, allora $f(x) > f(x_0)$. Si ha pure che per $x = s$, $f(s) > f(x_0)$, essendo la funzione crescente nel punto s; da ciò segue che per $x_0 < x \leq s$ $\Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$. Se ora facciamo vedere che $s = b$, allora segue $x_0 < x \leq b \Rightarrow f(x) > f(x_0)$, ossia la funzione f è strettamente crescente in $(x_0, b]$. Se per assurdo fosse $s \neq b$, poiché $s \in (a, b)$, segue $s < b$ e $(s, b) \neq \emptyset$. Detto ciò, si ha che $\forall \overline{x} \in (s, b), \exists x \in (s, \overline{x})$ per cui è falsa la diseguaglianza $f(x) > f(x_0)$ cioè si ha $f(x) \leq f(x_0)$, contro il fatto che per essere strettamente crescente nel punto s, definitivamente intorno ad s devono esserci punti $\overline{x}$ sufficientemente prossimi ad s per i quali risulti che $\forall x \in (s, \overline{x})$, $f(x) > f(x_0)$.■

Note:

(*) Si utilizza la relazione di De Morgan per le proposizioni $\overline{\forall \mathrm{x} \in \mathrm{X}/\mathcal{P}} \Leftrightarrow \exists \mathrm{x} \in \mathrm{X}/\overline{\mathcal{P}}$, dove la barra indica la negazione della proposizione.

(**) Cioè uno incluso nel successivo di modo che $\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$.

(***) Nella disuguaglianza larga doppia $a_n \leq x_0 \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deve valere in almeno una delle due diseguaglianze la diseguaglianza stretta, perché altrimenti dovrebbe esistere almeno un indice $\bar{n} \in \mathbb{N}/\ a_{\bar{n}} = x_0 = b_{\bar{n}}$, contro il fatto che $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n < b_n$.

Osservazione: Considerata la funzione dell'osservazione di pag.6, si potrebbe erroneamente applicare il teorema 6 , pensando che se nel punto $x_0 = 0$, dove la funzione è crescente, allora lo deve essere in ogni altro punto $x \neq 0$. Il fatto è che in tali siffatti punti la funzione non presenta uno stesso carattere di monotonia, in particolare negli infiniti punti di massimo e minimo relativi la funzione è strettamente crescente o decrescente solo a sinistra o a destra di essi.

E' naturale dare ora la definizione di funzione definitivamente monotona a sinistra o a destra di un punto $x_0 \in X$ di accumulazione per X.

Indicato con $I^-(x_0)$ e $I^+(x_0)$ rispettivamente un intorno sinistro e destro di $x_0$ contenuti in X, si ha:

Definizione : La funzione f(x) definita nell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice:

**crescente a sinistra del punto $x_0$** se $\exists I^-(x_0)$ / $\forall x \in I^-(x_0)$ , $f(x) \leq f(x_0)$

**strettamente crescente a sinistra di $x_0$** se $\exists I^-(x_0)$ / $\forall x \in I^-(x_0)$ , $f(x) < f(x_0)$

**crescente a destra del punto $x_0$** se $\exists I^+(x_0)$ / $\forall x \in I^+(x_0)$ , $f(x) \geq f(x_0)$

**strettamente crescente a destra di $x_0$** se $\exists I^+(x_0)$ / $\forall x \in I^+(x_0)$ , $f(x) > f(x_0)$

Proposizione 7:

Se la funzione f(x) è definitivamente crescente a sinistra e a destra del punto $x_0$, allora è crescente in $x_0$.

Dimostrazione : Dall'ipotesi segue che $\exists I^-(x_0)$ / $\forall x \in I^-(x_0)$ , $f(x) \leq f(x_0)$ e $\exists I^+(x_0)$ / $\forall x \in I^+(x_0)$ , $f(x) \geq f(x_0)$, per cui nell'intorno $\mathrm{I}(\mathrm{x}_0) = \mathrm{I}^-(\mathrm{x}_0) \cup \mathrm{I}^+(\mathrm{x}_0)$ si ha $\begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \end{cases}$,

cioè la funzione è crescente in $x_0$.■

Supponiamo ora che f definita nell'insieme $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{R}$ sia derivabile in $x_0$ , cioè abbia ivi derivata finita $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, o che pure abbia derivata infinita in $x_0$., ovvero $f'(x_0) = \mp\infty$.

Proposizione 8: Se f è derivabile in $x_0$ si ha

1. **f crescente in $\mathbf{x_0} \Rightarrow \mathbf{f'(x_0)} \geq \mathbf{0}$**
2. **f decrescente in $\mathbf{x_0} \Rightarrow \mathbf{f'(x_0)} \leq \mathbf{0}$**

Se f non è derivabile in $x_0$ con derivata infinita $\mathbf{f'(x_0)} = \infty$ **,** si ha

1. **f crescente in $\mathbf{x_0} \Rightarrow \mathbf{f'(x_0)} = +\infty$**
2. **f decrescente in $\mathbf{x_0} \Rightarrow \mathbf{f'(x_0)} = -\infty$**

Dimostrazione : Proviamo la 1.

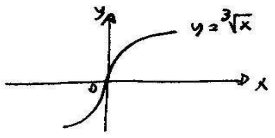
Se f è crescente in $x_0$, allora per la proposizione 3

$\exists I(x_0)/\forall x \in I(x_0) \cap X, \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$. Allora per il teorema del confronto, passando al limite la diseguaglianza, si ha $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \mathrm{f}'(\mathrm{x}_0) \geq 0$. Se f non è derivabile, da $\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0) = \infty$ e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$ $\mathrm{f'x0} \geq 0$. segue $\mathrm{f'x0} = +\infty$.

Proviamo la 2. Se f è decrescente in $x_0$, allora per la proposizione 3 $\exists I(x_0)/\forall x \in I(x_0) \cap X$, $\frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$. Allora per il teorema del confronto, passando al limite la diseguaglianza, si ha

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \mathrm{f}'(\mathrm{x}_0) \leq 0$. Se f non è derivabile, da $\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0) = \infty$ e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \mathrm{f}'(\mathrm{x}_0) \leq 0$. segue $\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0) = -\infty$.■

Nota: Come caso di funzione non derivabile in un punto $\mathrm{x}_0$, Ivi monotona, ma con derivata infinita nel punto $\mathrm{x}_0$ , si consideri la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$,definita in $\mathbb{R}$, prolungamento in una funzione dispari della potenza $x^{\frac{1}{3}}$ ( che per x <0 non può considerarsi una potenza non avendone le proprietà in quanto si avrebbe l'assurdo $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{12}} = \left[(x^2)^{\frac{1}{12}}\right]^2 \geq 0$ ) che per $\mathrm{x}_0 = 0$ ha $f(0) = 0$ e $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, strettamente crescente in $\mathrm{x}_0$, quindi crescente in $\mathrm{x}_0$, poiché $\begin{cases} f(x) < f(0), x < 0 \\ f(x) > 0, x > 0 \end{cases}$, avente $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$

$\mathrm{f}'(\mathrm{x}_0) = +\infty$. 

Tangente verticale al grafico nell'origine.

Osservazione:

Il teorema non vale sostituendo le diseguaglianze strette, cioè

$$\begin{cases} f \text{ strettamente crescente in } x_0 \not\Rightarrow f'(x_0) > 0 \\ f \text{ strettamente decrescente in } x_0 \not\Rightarrow f'(x_0) < 0 \end{cases}$$

Come contro esempio del primo caso, la funzione $f(x) = x^3$ si annulla nell'origine con la sua derivata prima poiché $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$, ma essendo $\begin{cases} f(x) < f(0), x < 0 \\ f(x) > f(0), x > 0 \end{cases}$, la funzione f è strettamente crescente in $\mathrm{x}_0 = 0$.

Come contro esempio del secondo caso, la funzione $f(x) = -x^3$ si annulla nell'origine con la sua derivata prima poiché $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$, ma essendo $\begin{cases} f(x) > f(0), x < 0 \\ f(x) < f(0), x > 0 \end{cases}$, la funzione f è strettamente decrescente in $\mathrm{x}_0 = 0$.

Proposizione 9: Se f(x) è derivabile in $\mathrm{x}_0$ , si ha

1. **f crescente in $\mathbf{x_0} \Rightarrow \mathbf{f'_-(x_0) \geq 0, f'_+(x_0) \geq 0}$**
2. **f decrescente in $\mathbf{x_0} \Rightarrow \mathbf{f'_-(x_0) \leq 0, f'_+(x_0) \leq 0}$**

Se f non è derivabile in $x_0$ con derivata infinita $\mathbf{f'(x_0) = \infty}$ **,** si ha

3. **f crescente in $\mathbf{x_0} \Rightarrow \mathbf{f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = +\infty}$**
4. **f decrescente in $\mathbf{x_0} \Rightarrow \mathbf{f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -\infty}$**

Dimostrazione : Proviamo la 1. Poiché f è crescente in $x_0$, per la proposizione 8 deve essere $f'(x_0) \geq 0$, d'altra parte, essendo f derivabile in $x_0$, si ha $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$, da cui anche $f'_-(x_0) \geq 0$ , $f'_+(x_0) \geq 0$.

Proviamo la 2. Poiché f è decrescente in $x_0$, per la proposizione 8 deve essere $f'(x_0) \leq 0$, d'altra parte, essendo f derivabile in $x_0$, si ha $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$, da cui anche $f'_-(x_0) \leq 0$ , $f'_+(x_0) \leq 0$.

Proviamo la 3. Per la proposizione 8, nell'ipotesi che f è crescente, si ha $f'(x_0) = +\infty$, da cui segue $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = +\infty$.

Proviamo la 4. Per la proposizione 8, nell'ipotesi che f è decrescente, si ha $f'(x_0) = -\infty$, da cui segue $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = -\infty$.■

Se f,definita nell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$, è derivabile in $x_0$, allora valgono le seguenti condizioni sufficienti affinché una funzione f(x) sia strettamente monotona.

Proposizione 10:

1. **f'( $\mathbf{x_0}$) $> 0 \Rightarrow$ f strettamente crescente in $\mathbf{x_0}$**
2. **f'( $\mathbf{x_0}$) $< 0 \Rightarrow$ f strettamente decrescente in $\mathbf{x_0}$**

Dimostrazione : Proviamo la 1. Se f'( $x_0$) $> 0$, allora per definizione $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$. quindi per il teorema della permanenza del segno si ha che $\exists I(x_0) / \ \forall x \in (I(x_0) - \{x_0\}) / \cap X$ , $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$. Per la proposizione 3 allora f è strettamente crescente in $x_0$

Proviamo la 2. Se f'( $x_0$) $< 0$, allora per definizione $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$. quindi per il teorema della permanenza del segno si ha che $\exists I(x_0) / \ \forall x \in (I(x_0) - \{x_0\}) / \cap X$ , $\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$. Per la proposizione 3 allora f è strettamente decrescente in $x_0$.■

Osservazione:

Se $f'(x_0) = 0$, tutto è possibile, nel senso che f può essere strettamente crescente in $x_0$, come nel caso $f(x) = x^3$, in cui per x = 0 , si ha $f'(0) = 0$ ed f strettamente crescente nell'origine, oppure, come nel caso

$f(x) = x^2$, che per $x = 0$ ha un minimo (assoluto), per cui f è decrescente a sinistra e crescente a destra dell'origine.

Una condizione sufficiente per la stretta crescenza in un intero intervallo è data dalla proposizione seguente.

Proposizione 11: Se la funzione f(x) è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(a, b)$, allora

1. $\mathbf{f'(x) > 0}$ , $\mathbf{\forall x \in (a, b) \Rightarrow f}$ **strettamente crescente in** $\mathbf{(a, b)}$
2. $\mathbf{f'(x) \geq 0}$ , $\mathbf{\forall x \in (a, b) \Rightarrow f}$ **crescente in** $\mathbf{(a, b)}$
3. $\mathbf{f'(x) < 0}$ , $\mathbf{\forall x \in (a, b) \Rightarrow f}$ **strettamente decrescente in** $\mathbf{(a, b)}$
4. $\mathbf{f'(x) \leq 0}$ , $\mathbf{\forall x \in (a, b) \Rightarrow f}$ **decrescente in** $\mathbf{(a, b)}$

Dimostrazione :

Proviamo la 1.

Se $\forall x \in (a, b), f'(x) > 0$, allora f per la proposizione 10 è strettamente crescente in ogni punto $x \in (a, b)$ e quindi per la proposizione 6 in $(a, b)$.

Alternativamente si può provare applicando il teorema di Lagrange . Si ha che f è strettamente crescente in $(a, b)$, perché se per assurdo non lo fosse, essendo falso che $\forall x', x'' \in (a, b), x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$, esisterebbe allora almeno una coppia di punti x', x''di $(a, b)$ tali che, $x' < x'' \Rightarrow f(x') \geq f(x'') \Rightarrow \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} \leq 0$. Considerato allora l'intervallo $[x', x''] \subseteq (a, b)$, la funzione $f(x)$ risulta continua in esso e derivabile all'interno, per cui sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Deve allora esistere almeno un punto $x \in (x', x'')$ per cui risulti $f'(x) = \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$ ,

donde $f'(x) \leq 0$, contro l'ipotesi. Ragionando in modo diretto, presi comunque in $(a, b)$ due punti $x' < x''$, per il teorema di Lagrange deve esistere almeno un punto $c \in [x', x'']$ tale che risulti $f'(c) = \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$, dove, in base all'ipotesi deve aversi $f'(c) > 0$ e quindi $\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x'') - f(x') > 0 \Rightarrow f(x') < f(x'')$, ovvero la funzione è strettamente crescente in $(a, b)$.

Proviamo la 2. Per ipotesi abbiamo che $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$. Presi comunque in $(a, b)$ due punti $x' < x''$, per il teorema di Lagrange deve esistere almeno un punto $c \in [x', x'']$ tale che risulti $f'(c) = \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$, dove, in base all'ipotesi deve aversi $f'(c) \geq 0$ e quindi $\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x'') - f(x') \geq 0 \Rightarrow f(x') \leq f(x'')$, ovvero la funzione è crescente in $(a, b)$.

Proviamo la 3.

Se $\forall x \in (a,b), f'(x) < 0$, allora f per la proposizione 10 è strettamente decrescente in ogni punto $x \in (a,b)$ e quindi per la proposizione 6 in $(a,b)$. Alternativamente presi comunque in $(a,b)$ due punti $x' < x''$, per il teorema di Lagrange deve esistere almeno un punto $c \in [x', x'']$ tale che risulti $f'(c) = \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$, dove, in base all'ipotesi deve aversi $f'(c) < 0$ e quindi $\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x'') - f(x') < 0 \Rightarrow f(x') > f(x'')$, ovvero la funzione è strettamente decrescente in $(a,b)$.

Proviamo la 4.

Per ipotesi abbiamo che $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$. Presi comunque in $(a,b)$ due punti $x' < x''$, per il teorema di Lagrange deve esistere almeno un punto $c \in [x', x'']$ tale che risulti $f'(c) = \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$, dove, in base all'ipotesi deve aversi $f'(c) \leq 0$ e quindi $\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'} \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x'') - f(x') \leq 0 \Rightarrow f(x') \geq f(x'')$, ovvero la funzione è decrescente in $(a,b)$.■

Osservazione: Si tenga presente che le 1. e 3. della proposizione precedente non sono invertibili come si vede considerando le funzioni definite in $\mathbb{R}$ $x^3$ e $-x^3$ rispettivamente strettamente crescente e strettamente decrescente,aventi nell'origine derivata nulla. Invece le 2., 4. sono invertibili, anche se non siamo nel caso di un intervallo.

Proposizione 12:

Se $f(x)$ è una funzione definita in un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ ed ivi monotona, derivabile nel sottoinsieme $Y \subseteq X$, si ha

1. **f(x) crescente in X$\Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in Y$**
2. **f(x) decrescente in X$\Rightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in Y$**

Dimostrazione:

Proviamo 1.

Se f è crescente in X, lo è anche nell'intorno di quei punti di accumulazione in cui la funzione risulta derivabile, per cui, in base alla proposizione 4, è crescente in tali punti. Allora per la proposizione 8 in tali punti deve aversi $f'(x) \geq 0$.

Proviamo 2.

Se f è decrescente in X, lo è anche nell'intorno di quei punti di accumulazione in cui la funzione risulta derivabile, per cui, in base alla proposizione 4, è decrescente in tali punti. Allora per la proposizione 8 in tali punti deve aversi $f'(x) \leq 0$.■

Possiamo quindi enunciare la seguente proposizione che caratterizza le funzioni monotone derivabili in un intervallo.

Proposizione 13:

Se f(x) è una funzione definita in un intervallo $(a, b)$ ed ivi derivabile, si ha:

1. **f(x) crescente in** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \boldsymbol{f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)}$
2. **f(x) decrescente in** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \boldsymbol{f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)}$

Dimostrazione:

Proviamo 1.

Se f è crescente in $(a, b), allora\ per\ la\ proposizione$ 12 deve essere $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$. Viceversa se $\mathrm{f'(x)} \geq 0, \forall \mathrm{x} \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, allora per la proposizione 11 f(x) crescente in $(a, b)$.

Proviamo 2.

Se f è decrescente in $(a, b)$, allora per la proposizione 12 deve essere $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$. Viceversa se $\mathrm{f'(x)} \leq 0, \forall \mathrm{x} \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, allora per la proposizione 11 f(x) decrescente in $(a, b)$.■

Quindi, mentre data una funzione strettamente crescente in un dato intervallo non è detto che necessariamente si abbia $f'(x) > 0$, potendosi solo affermare che $f'(x) \geq 0$, d'altra parte la condizione $f'(x) \geq 0$ in tutti i punti dell'intervallo non implica che f sia strettamente crescente nell'intervallo, potendo solo essere crescente, quindi eventualmente costante in qualche sotto intervallo nel quale risulti $f'(x) = 0$. Per la stretta crescenza o decrescenza ciò non deve accadere.

Il teorema seguente stabilisce un'equivalenza tra le funzioni continue e derivabili in un intervallo ed ivi strettamente monotone, con quelle di cui si può stabilire la non negatività e la non positività della derivata prima nell'intervallo e tali che questa non si annulli mai identicamente in alcun sottointervallo dell'intervallo dato.

Proposizione 14:

Se $f(x)$ è una funzione continua e derivabile nell'intervallo $(a, b)$, allora

1. **f(x) strettamente crescente in** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)} \\ \boldsymbol{\nexists (c, d) \subseteq (a, b) / f'(x) = 0, \forall x \in (c, d)} \end{cases}$
2. **f(x) strettamente decrescente in** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)} \\ \boldsymbol{\nexists (c, d) \subseteq (a, b) / f'(x) = 0, \forall x \in (c, d)} \end{cases}$

Dimostrazione:

Proviamo 1.

La condizione è necessaria perché se f è strettamente crescente in $(a,b)$, in base alla proposizione 6 pag.8, è strettamente crescente in ogni punto di $(a,b)$, per cui, stante la proposizione 8 pag.10, deve aversi $\forall x \in (a,b), f'(x) \geq 0$. Se poi per assurdo esistessero due punti $c < d$ in $(a,b)$ tali che$\forall x \in (c,d)$ risulti $f'(x) = 0$, allora (una notevole conseguenza del teorema di Lagrange stabilisce che tutte e sole le funzioni con derivata nulla in un intervallo sono quelle costanti in esso) si ha che $f(x)$ sarebbe costante nell'intervallo $(c,d) \subseteq (a,b)$, contro il fatto che per ipotesi, essendo f crescente in $(a,b)$, lo deve essere anche in ogni sua parte. Ne consegue allora che non può esistere alcun sottointervallo dell'intervallo $(a,b)$ in cui $f'(x)$ si annulli identicamente.

La condizione è sufficiente. Infatti se per ipotesi $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$ e, $\forall x \in (c,d)$ , $\nexists (c,d) \subseteq (a,b) / f'(x) = 0$ , scelti comunque due punti $c < d$ in $(a,b)$, applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $(c,d)$, si ha che deve esistere almeno un punto $\xi \in (c,d)$ interno a tale intervallo, per cui si abbia $\frac{f(d)-f(c)}{d-c} = f'(\xi)$. Poiché per ipotesi la derivata prima è non negativa in $(a,b)$, deve aversi $f'(\xi) \geq 0 \Rightarrow \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \geq 0$. $\Rightarrow f(d) - f(c) \geq 0 \Rightarrow f(c) \leq f(d)$.

Quindi $c < d \Rightarrow f(c) \leq f(d)$. Considerato allora un qualsiasi punto $x \in (c,d)$, riapplicando il teorema di Lagrange agli intervalli $[c,x]$ e $[x,d]$, quindi tenendo conto dell'ipotesi, segue $c < x < d \Rightarrow f(c) \leq f(x) \leq f(d)$. Le diseguaglianze larghe che compaiono nella diseguaglianza doppia devono necessariamente essere strette poiché, se per assurdo si avesse $f(c) = f(d) = k$, allora da $f(x) = k$, , $\forall x \in (c,d)$ seguirebbe che f, essendo costante nell'intervallo $(c,d)$, si dovrebbe avere ivi $f'(x) = 0$, contro l'ipotesi. Allora, per l'arbitrarietà della scelta dei punti c e d in $(a,b)$, segue che posto $c = x', d = x''$, si ha che $\forall x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$, cioè f è strettamente crescente in $(a,b)$.

Proviamo 2.

La condizione è necessaria perché se f è strettamente decrescente in $(a,b)$, in base alla proposizione 6 pag.8, è strettamente decrescente in ogni punto di $(a,b)$, per cui, stante la proposizione 8 pag.10, deve aversi $\forall x \in (a,b), f'(x) \leq 0$. Se poi per assurdo esistessero due punti $c < d$ in $(a,b)$ tali che$\forall x \in (c,d)$ risulti $f'(x) = 0$, allora (una notevole conseguenza del teorema di Lagrange stabilisce che tutte e sole le funzioni con derivata nulla in un intervallo sono quelle costanti in esso) si ha che $f(x)$ sarebbe costante nell'intervallo $(c,d) \subseteq (a,b)$, contro il fatto che per ipotesi, essendo f decrescente in $(a,b)$, lo deve essere anche in ogni sua parte. Ne consegue allora che non può esistere alcun sottointervallo dell'intervallo $(a,b)$ in cui $f'(x)$ si annulli identicamente.

La condizione è sufficiente. Infatti se per ipotesi $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$ e, $\forall x \in (c,d)$ , $\nexists (c,d) \subseteq (a,b) / f'(x) = 0$ , scelti comunque due punti $c < d$ in $(a,b)$, applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $(c,d)$, si ha che deve esistere almeno un punto $\xi \in (c,d)$ interno a tale intervallo, per cui si abbia $\frac{f(d)-f(c)}{d-c} = f'(\xi)$. Poiché per ipotesi la derivata prima è non positiva in $(a,b)$, deve aversi $f'(\xi) \leq 0 \Rightarrow \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \leq 0$. $\Rightarrow f(d) - f(c) \leq 0 \Rightarrow f(c) \geq f(d)$.

Quindi $c < d \Rightarrow f(c) \geq f(d)$. Considerato allora un qualsiasi punto $x \in (c, d)$, riapplicando il teorema di Lagrange agli intervalli $[c, x]$ e $[x, d]$, quindi tenendo conto dell'ipotesi, segue $c < x < d \Rightarrow f(c) \geq f(x) \geq f(d)$. Le diseguaglianze larghe che compaiono nella diseguaglianza doppia devono necessariamente essere strette poiché, se per assurdo si avesse $f(c) = f(d) = k$, allora da $f(x) = k, , \forall \mathrm{x} \in (\mathrm{c}, \mathrm{d})$ seguirebbe che f, essendo costante nell'intervallo $(c, d)$, si dovrebbe avere ivi $f'(x) = 0$, contro l'ipotesi. Allora, per l'arbitrarietà della scelta dei punti c e d in $(\mathrm{a}, \mathrm{b})$, segue che posto $c = x', d = x''$, si ha che $\forall x' < x'' \Rightarrow f(x') > f(x'')$, cioè f è strettamente decrescente in $(a, b)$.■

.