Liceo G. B. Vico - Napoli

Un problema sugli attriti

Prof. Giuseppe Caputo

Per attrito s'intende la forza che si manifesta nel contatto tra due corpi in moto relativo. Questa risulta contraria al senso del moto ed è nulla se i due corpi sono entrambi in quiete rispetto ad un comune sistema di riferimento. In particolare l'attrito è radente quando i due corpi strisciano l'uno sull'altro.

Dall'esperienza si ricava che l'attrito radente è sempre proporzionale alla forza premente secondo un coefficiente di proporzionalità adimensionale positivo μ_s, detto coefficiente d'attrito statico, dipendente dalla natura dei due corpi e dalla levigatezza delle superfici a contatto, ma indipendente dall'estensione di queste ultime.

Riferendoci ad una celebre esperienza di Coulomb in cui un corpo di piccole dimensioni di peso P è appoggiato su un piano orizzontale, si applica ad esso una forza orizzontale di modulo F crescente. Si ha che il corpo è in quiete fino a quando nella diseguaglianza $\mathrm{F} \leq \mu_s \mathrm{P}$ vale il segno di uguale.

Il coefficiente di attrito statico μ_s, in generale minore dell'unità, è indipendente sia dal peso del corpo, sia dall'estensione dell'area di contatto, ma dipende unicamente dalla natura fisica delle superfici di contatto.

La superficie d'appoggio esplica, oltre alla reazione vincolare normale alla superficie e rivolta verso l'esterno di essa, una reazione tangenziale che si oppone allo scorrimento del corpo, dovuta alla scabrosità delle superfici a contatto e alle forze di adesione che si esercitano tra le particelle del corpo e della superficie di contatto. Mentre la reazione vincolare, dipendendo dal peso del corpo, può avere qualsiasi intensità, la reazione tangenziale può assumere al più il valore $F_{as} = \mu_s \mathrm{N}$, detto attrito del primo distacco, dove N è la differenza tra il peso del corpo e la componente normale della forza traente. Quando $\mu_s \to 0$, la superficie di coefficiente d'attrito statico μ_s tende al limite ad essere una superficie liscia con coefficiente di attrito $\mu_s = 0$. Quando si ha per la forza traente $F > F_{as}$, il corpo si pone il movimento ed anche in tal caso sul corpo agisce una reazione tangenziale che si oppone allo scorrimento del corpo, detta attrito dinamico, di intensità $\mathrm{F_{ad}} = \mu_d \mathrm{N}$, dove $0 < \mu_d < 1$, è il coefficiente adimensionale di attrito dinamico, dipendente dalla natura delle superfici a contatto. Si ha che $\mu_d < \mu_s$, per cui la forza per mettere in moto un corpo che poggia su una superficie scabra è maggiore di quella necessaria per mantenerlo in moto uniforme.

Nel caso di pietre rugose si ha $\mu_s = 0.75$, nel caso di gomma - asfalto asciutto si ha $\mu_s = 0.85$, nel caso di gomma - asfalto bagnato si ha $\mu_s = 0.70$ e $\mu_d = 0.50$, nel caso di ghiaccio – ghiaccio $\mu_s = 0.65$ e $\mu_d = 0.50$.

Per focalizzare l'argomento, risolviamo il seguente problema. Abbiamo una macchina del peso di 1000 kg_p con le ruote bloccate su una strada pianeggiante bagnata e ci proponiamo di calcolare

l'intensità e la direzione della forza traente che un carro-gru deve utilizzare affinché tale forza si la minima possibile per metterla in movimento e per poi trainarla con moto uniforme.

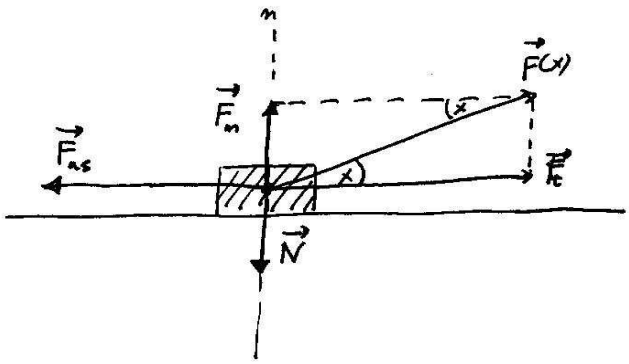
Schematizziamo il corpo di peso P con un parallelepipedo appoggiato su un piano orizzontale, quindi supponiamo di applicare al corpo una forza traente d'intensità F, la cui direzione forma con il piano, nella direzione del moto, un angolo variabile x tra 0 e 90°, di modo che l'intensità F sia una funzione dell'angolo x misurato in radianti. Il problema consiste di determinare, se esiste, il valore minimo della forza $F(x)$. Si ha:

$$\vec{F}(x) = \vec{F}_t(x) + \vec{F}_n(x) \quad , \qquad |\vec{F}_{as}| = F_{as} = \mu_s N, \text{ forza di attrito statico}$$

$|\vec{F}_t| = F_t = F\cos x$, modulo componente tangenziale della forza $\vec{F}$

$|\vec{F}_n| = F_n = F\sin x$, modulo componente normale della forza $\vec{F}$

$|\vec{N}| = N = P - F_n = P - F\sin x$, modulo della forza normale premente complessiva



Il corpo si pone in movimento se la componente tangenziale della forza equilibra la forza d'attrito del primo distacco, cioè se $F_t = F_{as} \Rightarrow$

$$F\cos x = \mu_s N \Rightarrow F\cos x = \mu_s(P - F\sin x) \Rightarrow$$

$$\boxed{F(x) = \frac{\mu_s P}{\mu_s \sin x + \cos x}}$$

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

La funzione F(x) si può utilmente trasformare con il metodo del fattore normalizzante (angolo aggiunto) determinando $k = \sqrt{1+\mu_s^2}$, $tg\alpha = \mu_s \Rightarrow \alpha = arctg\mu_s$, da cui si ottiene

$\mu_s \sin x + \cos x = \sqrt{1+\mu_s^2}\cos(x-\alpha)$ e quindi la funzione assume la forma

$$F(x) = \frac{\mu_s P}{\sqrt{1+\mu_s^2}\cos(x-\alpha)} = \frac{\mu_s P}{\sqrt{1+\mu_s^2}} \cdot \frac{1}{\cos(x-\alpha)}$$

dove, essendo il termine $\frac{\mu_s P}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$ un fattore costante, la ricerca del minimo di $F(x)$ si riduce alla ricerca del minimo della funzione $G(x) = \frac{1}{\cos(x-\alpha)}$. Osservato quindi che il minimo di $G(x)$ si ha in corrispondenza del massimo di $\cos(x-\alpha)$ per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, esso si ha per $x - \alpha = 0$

cioè per $x = \alpha = arctg\ \mu_s$ e vale 1, in corrispondenza del quale si ha il valore minimo della forza

$F(\alpha) = \frac{\mu_s P}{\sqrt{1+\mu_s^2}}$ con $\alpha = arctg\ \mu_s$ angolo utile.

Tale risultato si poteva alternativamente trovare derivando rispetto a x la funzione $F(x) = \frac{\mu_s P}{\sqrt{1+\mu_s^2}} \cdot \frac{1}{\cos(x-\alpha)}$, ottenendo $F'(x) = \frac{\sin(x-\alpha)}{\cos^2(x-\alpha)}$,

quindi ricercando i punti critici nelle soluzioni dell'equazione $F'(x) = 0 \Rightarrow \sin(x-\alpha) = 0 \Rightarrow$

$x = \alpha$ e notando che per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x-\alpha) \gtreqless 0 \Rightarrow x \gtreqless \alpha$, per cui la funzione $F(x)$,essendo strettamente decrescente a sinistra di α e strettamente crescente a destra di α, per $x = \alpha$ presenta un punto di minimo assoluto. Anche senza trasformare la funzione $F(x) = \frac{\mu_s P}{\mu_s \sin x + \cos x}$

si ottiene lo stesso risultato, avendosi $F'(x) = \frac{\mu_s P}{(\mu_s \sin x + \cos x)^2}(\sin x - \mu_s cos x) = 0 \Rightarrow$

$\sin x - \mu_s cos x = 0 \Rightarrow tgx = \mu_s \Rightarrow x = arctg\mu_s$ e $tgx \gtreqless \mu_s \Leftrightarrow x \gtreqless arctg\mu_s$. (*)

Nel caso dell'attrito dinamico, le conclusioni sono le stesse ove si sostituisca il coefficiente di attrito statico μ_s , con quello di attrito dinamico μ_d. La formula è quindi:

$$\boxed{\begin{array}{c} \alpha = arctg\ \mu_s \\ F(\alpha) = \frac{\mu_s P}{\sqrt{1+\mu_s^2}} \end{array}}$$

Si noti che l'angolo utile è indipendente dal peso del corpo e dipende unicamente dal coefficiente d'attrito, cioè dalla natura delle superfici a contatto. Non è così per la forza minima che è direttamente proporzionale al peso del corpo appoggiato secondo una costante di proporzionalità dipendente dal coefficiente d'attrito.

Possiamo ora risolvere il problema. Indicato con α_s l'angolo utile per vincere l'attrito del primo distacco con la minima forza e α_d l'angolo utile per vincere l'attrito dinamico, si ha:

$$\begin{cases} \alpha_s = arctg\ \mu_s = arctg\ 0.70 \cong 0.61\ rad = {}^{180}/_{\pi} \cdot 0.61 \cong 35° \\ \alpha_d = arctg\ \mu_d = arctg\ 0.50 \cong 0.46\ rad = {}^{180}/_{\pi} \cdot 0.46 \cong 26°21'36'' \end{cases} \Rightarrow \alpha_s - \alpha_d \cong 9°$$

Per cui, una volta vinto il primo distacco, il braccio del carro-attrezzi deve abbassarsi di circa 9°affinchè la macchina venga trainata con moto uniforme impiegando la minima forza.

Per le forze si ha: $F(\alpha_s) = \frac{\mu_s P}{\sqrt{1+\mu_s^2}} = \frac{0.70\times 1000 Kg_p}{\sqrt{1+0.70^2}} \cong 573\ Kg_p = 9.8 \times 573 \cong 5615\ N$

$$F(\alpha_d) = \frac{\mu_d P}{\sqrt{1+\mu_d^2}} = \frac{0.50\times 1000 Kg_p}{\sqrt{1+0.70^2}} \cong 409.61\ kg_p = 9.8 \times 409.61 \cong 4014\ N$$

(*) D'altra parte per determinare il massimo della funzione $g(x)= \mu_s \sin x + \cos x$, da $g'(x) = -\sin x + \mu_s \cos x = 0$, segue che $x = \alpha = arctg\ \mu_s$ è punto critico (estremale) tale che $\sin\alpha = \mu_s \cos\alpha$, quindi da $g(\alpha) = \cos\alpha + \mu_s \sin\alpha$ segue sostituendo $g(\alpha) = \cos\alpha + \mu_s^2 \cos\alpha = (1+\mu_s^2)\cos\alpha$, donde $\sin\alpha = \mu_s \cos\alpha = \mu_s^2 cos^2\alpha = sin^2\alpha = 1 - cos^2\alpha \Rightarrow (1+\mu_s^2)cos^2\alpha = 1$.

Quindi

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_s^2}} \Rightarrow g(\alpha) = \frac{1+\mu_s^2}{\sqrt{1+\mu_s^2}} = \sqrt{1+\mu_s^2}$, da cui osservato che $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mu_s \end{cases}$ e che $\begin{cases} \sqrt{1+\mu_s^2} > 1 \\ \sqrt{1+\mu_s^2} > \mu_s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(\alpha) > 1 \\ g(\alpha) > \mu_s \end{cases}$, il valore di ordinata $g(\alpha)$ è maggiore del valore di ordinata assunto dalla funzione positiva $g(x)$ negli estremi dell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ per cui per $x = \alpha$ si ha il massimo della funzione, deducendosi ciò dal segno della derivata prima di $g(x)$.