L'Atomo di Rutherford

Prof. Giuseppe Caputo , Liceo scientifico G. Vico - Napoli

In quest'articolo voglio descrivere il modello atomico dell'atomo d'idrogeno introdotto da Rutherford nel 1911 prima della scoperta del protone da parte dello stesso Rutherford nel 1919. In questo modello, definito classico giacché basato sulle leggi della meccanica classica, l'atomo è visto come un sistema planetario con un protone nel nucleo al posto del Sole e un elettrone che gli gira attorno come un satellite su orbite ellittiche, in particolare circolari. Ricordiamo che l'elettrone fu scoperto da Joseph Thomson nel 1817. Sperimentando con tubi a raggi catodici egli si convinse dell'esistenza di particelle aventi carica negativa, determinandone il rapporto per unità di massa; ciò gli permise di elaborare un modello atomico in cui l'atomo è visto come una massa compatta di materia positiva, nella quale con regolarità vi sono gli elettroni negativi. Poiché l'analogia con un panettone è evidente, tale modello è anche detto del "panettone". Nel 1903 Philipp Lenard, bombardando dei fogli di alluminio con elettroni accelerati, si rese conto che l'atomo non poteva avere una struttura estesa come pensava Thomson, ma in gran parte doveva essere vuoto. Storicamente a questo punto nasce il modello atomico di Rutherford come miglioramento dell'atomo di Thomson. Bombardando sottilissime lamine d'oro dello spessore di un centinaio di atomi con radiazioni α, le quali sono fasci di particelle costituite da nuclei di elio emessi da elementi radioattivi, solo una piccolissima parte di queste subiva una deviazione, in alcuni casi anche di 180°. Tali risultati gli permisero di elaborare il seguente modello atomico: L'atomo è per lo più vuoto.

- La maggior parte della massa dell'atomo è concentrata nel nucleo carico positivamente e molto piccolo dell'ordine di grandezza di 10^{-15}m.
- Gli elettroni ruotano attorno al nucleo a determinate distanze da esso, dove la forza centripeta necessaria a tale moto è rappresentata dall'attrazione elettrostatica colombiana tra elettrone e nucleo, mentre dal punto di vista dell'elettrone, la forza centrifuga causata dalla sua velocità è uguale e opposta all'attrazione del nucleo.

In simboli la condizione di equilibrio

$$F_{elettrostatica} = -F_{centrifuga}\,, \quad \text{dove} \quad F_{elettrostatica} = \frac{q_p q_e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \alpha\frac{1}{r^2}$$

è la forza elettrostatica, con $q_p \cong 1.60 \cdot 10^{-19} C$ carica del protone, $q_e \cong -1.60 \cdot 10^{-19}\ C$ carica dell'elettrone, $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$ la costante dielettrica del vuoto, r la distanza tra le cariche, mentre la forza centrifuga è espressa dall'equazione $F_{centrifuga} = \frac{1}{2} m_e v^2$, dove $m_e \cong 9.11 \cdot 10^{-31} kg$, è la massa dell'elettrone e v la sua velocità orbitale. Si noti che La massa del protone è $m_p \cong 1.67 \cdot 10^{-27}$, per cui avendosi $\frac{m_p}{m_e} = 1836$, la massa del protone è quasi duemila volte quella dell'elettrone, giustificando la posizione di concentrare tutta la massa dell'atomo nel nucleo. Si deve pure considerare il fatto che protone ed elettrone, oltre che a interagire elettricamente, hanno un'interazione gravitazionale trascurabile in quanto, essendo la forza gravitazionale $F_{gravitazionale} = G\frac{m_p m_e}{r^2}$, con la costante di gravitazione universale $G = 6.67 \cdot 10^{-11} N m^2 kg^{-2}$, risulta $\frac{F_{elettrica}}{F_{gravitazionale}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 G}\frac{q_p q_e}{m_p m_e} = \frac{1}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}} \cdot \frac{(1.60 \cdot 10^{-19})^2}{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}} = 2.27 \cdot 10^{39}$, cioè la forza elettrostatica è circa duemila miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di volte la forza gravitazionale!

Il modello atomico di Rutherford è per lo meno incompleto poiché non spiega :

- La discontinuità degli spettri di assorbimento e di emissione da parte degli atomi. Per ogni elemento della tavola periodica, si verifica sperimentalmente che gli atomi possono assorbire ed emettere radiazione elettromagnetica soltanto in determinate frequenze caratteristiche dell'elemento in questione. Ad esempio l'analisi spettroscopica della luce emessa da atomi di mercurio eccitati rivela, al posto di uno spettro continuo come ci si aspetterebbe, linee in corrispondenza di determinate frequenze, implicando ciò l'emissione o l'assorbimento solo in corrispondenza di queste.
- L'atomo risulta instabile, perché, secondo l'elettrodinamica classica di Maxwell, le cariche accelerate devono emettere energia sotto forma di radiazione elettromagnetica, per cui gli elettroni , nel ruotare attorno al nucleo, essendo soggetti a un'accelerazione radiale, dovrebbero cedere energia a spese della propria energia cinetica, finendo per precipitare nel nucleo, contro l'evidenza sperimentale.

La necessità di poter spiegare la stabilità dell'atomo e la discontinuità degli spettri di emissione e assorbimento, portò il fisico danese Niels Bohr a estendere nel 1913 il modello di Rutherford in modo da poter comprendere l'ipotesi di Planck e creare il modello atomico quantizzato semi-classico che porta il suo nome.

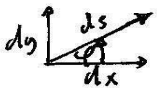
In quest'articolo, con intento prevalentemente didattico, studiamo per linee generali, l'atomo d'idrogeno secondo il modello classico di Rutherford e, per far questo, immaginiamo il protone e l'elettrone come punti materiali delle cui masse si è già detto, supponendo che il baricentro dell'atomo sia nel nucleo coincidente con il protone. Inoltre l'atomo stesso lo consideriamo come un sistema meccanico costituito da due punti materiali, il protone e l'elettrone, introducendo un sistema cartesiano Oxyz con l'origine nel nucleo.
Per una migliore e più approfondita comprensione degli argomenti trattati, rimando il lettore, secondo personale necessità, a delle integrazioni di matematica e meccanica alla fine dell'articolo a compendio di questo, segnalando di volta in volta la nota corrispondente.
La forza elettrostatica $F_{elettrostatica} = \frac{q_p q_e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \alpha\frac{1}{r^2}$ attrae verso l'origine O l'elettrone in A, per cui se **u** è il versore del vettore **F**, si ha che il vettore posizione **r**(A) dell'elettrone e **u** hanno la stessa direzione ma verso opposto.
Allora il lavoro infinitesimo fatto dal campo elettrico per spostare l'elettrone verso l'origine del tratto infinitesimo d**r** è dato da $dW = \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\mathbf{r}^2}\mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \alpha\cos 180°\mathrm{dr} = -\alpha\frac{dr}{r^2}$.
Poiché il campo elettrico è conservativo(1), possiamo integrare lungo una qualsiasi curva semplice regolare di estremi i punti A e B, quindi in particolare lungo il segmento che unisce tali punti, per ottenere il lavoro fatto dalle forze del campo per spostare l'elettrone dal punto A al punto B, ottenendo

$$W = \int_{r(A)}^{r(B)} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\alpha\left[-\frac{1}{r}\right]_{r(A)}^{r(B)} = \frac{\alpha}{r(B)} - \frac{\alpha}{r(A)} = U(B) - U(A)$$

In analogia al campo gravitazionale, l'elettrone deve avere energia potenziale $\mathrm{U} = -\frac{\alpha}{\mathrm{r}}$ nel campo elettrostatico attrattivo con centro in O. Infatti quando il punto B tende ai limiti del campo, cioè all'infinito, si ha che l'energia potenziale in tale punto diviene nulla poiché $\mathrm{r(B)} \to \infty$, distanza di B dall'origine. Posto allora uguale a zero l'energia potenziale di una carica a distanza infinita dall'origine, ossia U(B) = 0, si ricava che $U(A) = -\frac{\alpha}{r(A)}$, donde per r = r(A) distanza dell'elettrone dal protone nel centro O, si ottiene $\mathrm{U} = -\frac{\alpha}{\mathrm{r}}$.

Poiché il campo elettrico è conservativo, vale il teorema della conservazione dell'energia meccanica(1), il quale afferma che la somma $E = E_c + E_p$ dell'energia cinetica e potenziale di un sistema meccanico su cui la risultante delle forze esterne è nulla, è costante nel tempo; vale inoltre, nelle ipotesi poste, il principio della conservazione del momento angolare(1), oppure momento della quantità di moto, rispetto a un punto O il quale afferma che il momento angolare totale **L** di un sistema meccanico, su cui agiscono solo forze interne, rispetto a un dato punto O è costante nel tempo. Applicando tali principi al sistema meccanico protone – elettrone, in particolare per l'elettrone si conserva sia l'energia che il momento angolare, implicando ciò che il moto avviene nel piano Oxy. Infatti, detta m la massa dell'elettrone, si ha $E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{\mathrm{r}}$, ci proponiamo di esprimere l'energia E in funzione delle coordinate polari (r, φ) legate alle coordinate cartesiane dalle formule di trasformazione $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.

Cominciamo con lo osservare che se le equazioni parametriche del moto dell'elettrone nel piano Oxy sono $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,



si ha $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ da cui $v = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{dt}\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \Rightarrow v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Poiché in coordinate polari le equazioni parametriche sono $\begin{cases} x = x\big(t, \varphi(t)\big) = r(t)\cos\varphi(t) \\ y = y\big(t, \varphi(t)\big) = r(t)\sin\varphi(t) \end{cases}$, derivando rispetto al tempo si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}^2 = \dot{r}^2 cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\varphi - 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi \\ \dot{y}^2 = \dot{r}^2 sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2 cos^2\varphi + 2r\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene

$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 cos^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\varphi + \dot{r}^2 sin^2\varphi + r^2\dot{\varphi}^2 cos^2\varphi = \dot{r}^2(sin^2\varphi + cos^2\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2(sin^2\varphi + cos^2\varphi) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$, da cui sostituendo nell'espressione dell'energia si ha

$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\alpha}{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{\mathrm{r}}$ che è l'energia in funzione delle coordinate polari. Esprimiamo ora il momento angolare in funzione delle coordinate polari.

Si ha [2] $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ mv_x & mv_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & 0 \\ m\dot{x} & m\dot{y} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} y & 0 \\ m\dot{y} & 0 \end{vmatrix} -$
$\mathbf{j}\begin{vmatrix} x & 0 \\ m\dot{x} & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} x & y \\ m\dot{x} & m\dot{y} \end{vmatrix} = \mathbf{i}(y\cdot 0 - m\dot{y}\cdot 0) - \mathbf{j}(x\cdot 0 - m\dot{x}\cdot 0) + \mathbf{k}(xm\dot{y} - ym\dot{x}) = m(x\dot{y} - y\dot{x})\mathbf{k} =$
$m(x\dot{y} - y\dot{x})(0,0,1) = m(0,0,x\dot{y} - y\dot{x}) = \big(0,0,x(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi) - y(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi)\big) =$
$m(0,0,r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi - r\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi + r^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi) = m\big(0,0,r^2\dot{\varphi}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\big) =$

$(0,0,mr^2\dot{\varphi})$.

Allora, essendo il momento angolare **L** costante durante il moto dell'elettrone per la conservazione del momento angolare, necessariamente è costante la sua componente $l = mr^2\dot{\varphi}$ lungo l'asse z, per cui da

$l = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{l^2}{m^2r^4} \Rightarrow r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{l^2}{m^2r^2}$, segue sostituendo nell'espressione dell'energia

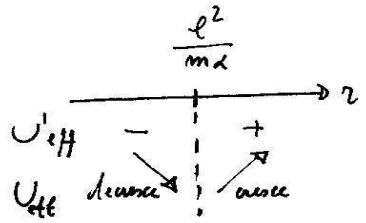
$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{m^2r^2}\right) - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff} = cost$$

dove il termine $U_{eff} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$ prende il nome di energia potenziale efficace.

Studiamo ora al variare di r la funzione energia potenziale efficace $U_{eff} = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} = \frac{l^2 - 2m\alpha r}{2mr^2}$ che risulta definita in $\mathbf{R}^+$ e si annulla se $l^2 - 2m\alpha r = 0 \Rightarrow r = \frac{l^2}{2m\alpha}$.

Nell'origine la funzione presenta una discontinuità di 2° specie poiché
$\lim_{r\to 0^+} U_{eff} = \lim_{r\to 0^+} \frac{l^2 - 2m\alpha r}{2mr^2} = +\infty$ ed è infinitesima all'infinito in quanto $\lim_{r\to +\infty} U_{eff} = \lim_{r\to +\infty} \frac{l^2 - 2m\alpha r}{2mr^2} = 0.$

Derivando si ottiene $U'_{eff}(r) = \frac{d}{dr}\left(\frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\right) = -\frac{l^2}{mr^3} + \frac{\alpha}{r^2}$



$\Rightarrow U'_{eff}(r) \gtreqless 0 \Rightarrow \frac{-l^2 - m\alpha r}{mr^3} \gtreqless 0 \Rightarrow -l^2 - m\alpha r \gtreqless 0 \Rightarrow r \gtreqless \frac{l^2}{m\alpha} \Longrightarrow$

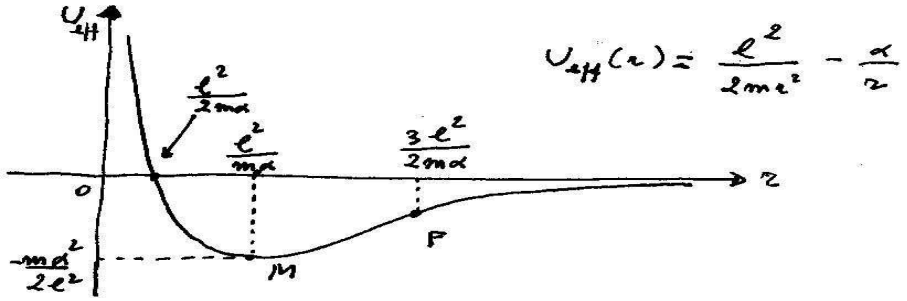
$\boldsymbol{r} = \frac{l^2}{m\alpha}$ è l'ascissa del punto di minimo assoluto della funzione, la cui ordinata è

$U_{eff}\left(\frac{l^2}{m\alpha}\right) = \frac{l^2}{2m\frac{l^4}{m^2\alpha^2}} - \frac{\alpha}{\frac{l^2}{m\alpha}} = \frac{1}{\frac{2l^2}{m\alpha^2}} - \frac{m\alpha^2}{l^2} = \frac{1}{2}\frac{m\alpha^2}{l^2} - \frac{m\alpha^2}{l^2} = -\frac{m\alpha^2}{2l^2} \Rightarrow M\left(\frac{l^2}{m\alpha}, -\frac{m\alpha^2}{2l^2}\right)$ punto di minimo assoluto di U_{eff}. La derivata seconda è $U''_{eff}(r) = \frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{l^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\right) = \frac{3l^2}{mr^4} - \frac{2\alpha}{r^3}$

$\Rightarrow \mathrm{U}''_{eff} = 0 \Rightarrow r = \frac{3l^2}{2m\alpha}$, mentre la derivata terza è $\mathrm{U}'''_{eff}(r) = \frac{6\alpha}{r^4} - \frac{12l^2}{mr^5} \Rightarrow \mathrm{U}'''_{eff}\left(\frac{3l^2}{2m\alpha}\right) = -\frac{32m^4\alpha^5}{81l^8} \neq 0$

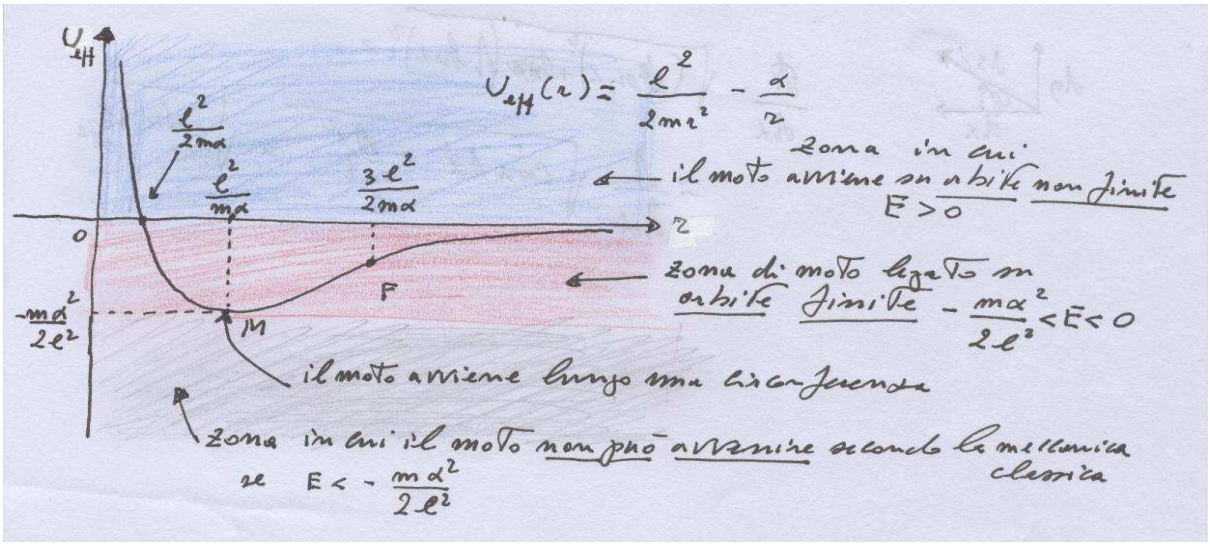
Per cui $F\left(\frac{3l^2}{2m\alpha}, -\frac{4m\alpha^2}{9l^2}\right)$ è punto di flesso.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di U_{eff}.

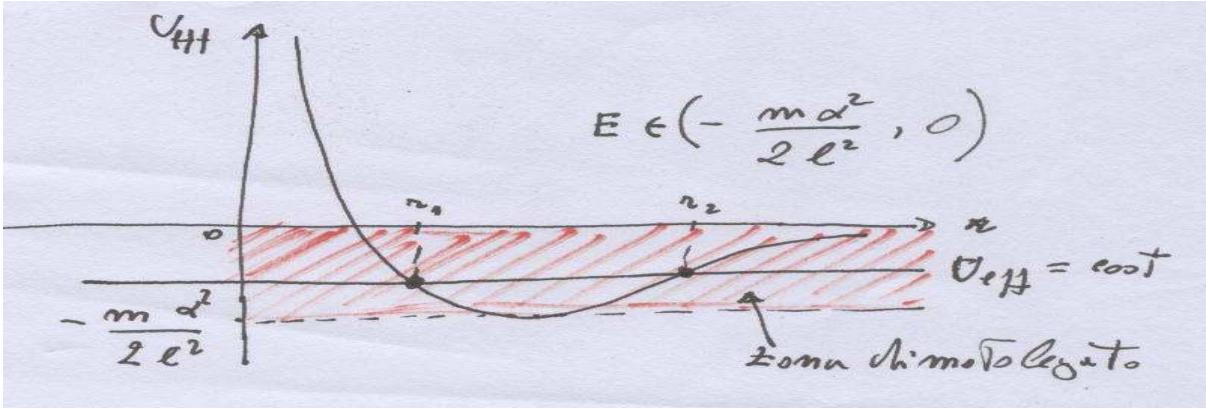


Allora, essendo non negativa l'energia cinetica dell'elettrone $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$, ciò implica $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathrm{U}_{eff} \geq \mathrm{U}_{eff} \Rightarrow \mathrm{E} \geq \mathrm{U}_{eff}$ che è la condizione secondo la quale può avvenire il moto nella meccanica classica.

Poiché il valore minimo dell'energia potenziale efficace è $\mathrm{U}_{eff} = -\frac{m\alpha^2}{2l^2}$, per la meccanica classica il moto avviene se è rispettata la condizione $\mathrm{E} \geq -\frac{m\alpha^2}{2l^2}$, quindi dal grafico si deducono le varie condizioni in cui può avvenire il moto dell'elettrone:



Poiché abbiamo interesse limitatamente al fatto che l'elettrone si muova di moto legato a orbite finite, dobbiamo considerare so valori negativi dell'energia E appartenenti all'intervallo

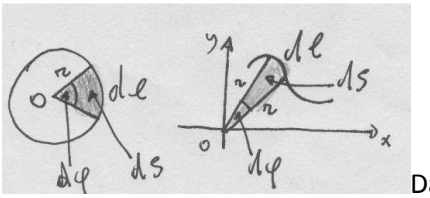


$l\left(-\frac{m\alpha^2}{2l^2}, 0\right)$ in corrispondenza dei quali si hanno due valori del raggio dell'orbita. A questo punto è utile ricordare le tre leggi di Keplero sulle orbite dei pianeti:

1. Ogni pianeta descrive intorno al Sole un'ellisse nella quale il Sole occupa uno dei due fuochi.
2. Il raggio vettore dal Sole al pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.
3. Il rapporto tra il quadrato del periodo orbitale e il cubo della distanza media dal Sole è costante, ovvero $\frac{T^2}{r^3}$ = cost.

Osserviamo ora che se su di una circonferenza di raggio r consideriamo un arco infinitesimo dl che sottende un angolo al centro infinitesimo $d\varphi$ misurato in radianti, deve aversi $dl = r\, d\varphi$. Quindi

considerato il settore circolare infinitesimo dS individuato dall'arco dl , si ottiene l'area del settore circolare infinitesimo $dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$ (segue dalla proporzione $\frac{dS}{\pi r^2} = \frac{dl}{2\pi r}$ $\Rightarrow dS = \frac{1}{2}r dl = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$).



Da ciò si ricava che un tratto infinitesimo dl di una generica curva del piano Oxy si può approssimare con un arco infinitesimo di circonferenza, ottenendo $dl = r\, d\varphi$.e la relativa area sottesa de esso uguale a $dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$.

Dividendo per dt si ha $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$, quindi posto $\frac{dS}{dt} = a$ detta <u>velocità areolare</u>, la condizione di conservazione del momento angolare $l = \mathrm{mr}^2\dot{\varphi} = \mathrm{cost} \Rightarrow \frac{l}{2m} = \frac{1}{2}\mathrm{r}^2\dot{\varphi}$ = cost, equivale a porre $a = \frac{l}{2m} =$ cost , che è appunto la 2°legge di Keplero.

Ci proponiamo ora di scrivere le equazioni del moto dell'elettrone, quindi dedurre da esse la 1°legge di Keplero.

Dalla relazione $\mathrm{E} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathrm{U}_{eff} \Rightarrow \frac{2(E-\mathrm{U}_{eff})}{m} = \dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \Rightarrow dr = \sqrt{\frac{2(E-\mathrm{U}_{eff})}{m}}$dt ,da cui integrando tra 0 e t si ottiene la 1° equazione oraria del moto dell'elettrone

$r(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2(E-\mathrm{U}_{eff})}{m}}\,\mathrm{dt}$, che non esplicitiamo.

Dalla relazione della conservazione del momento angolare $l = \mathrm{mr}^2\dot{\varphi} = \mathrm{cost}$, si ha $l = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \frac{l}{mr^2}\mathrm{dt}$, donde integrando tra 0 e t si ha la 2° equazione oraria $\varphi(t) = \int_0^t \frac{l}{mr^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau$, nel quale integrale bisogna sostituire a r(t) il valore ottenuto integrando la 1° equazione oraria.

Ottenute così le due equazioni orarie $\begin{cases} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$ del moto dell'elettrone, determiniamone la traiettoria del moto. Scrivendo le due equazioni in forma differenziale e sostituendo dt nella seconda, si ottiene $\begin{cases} dt = \sqrt{\frac{m}{2(E-\mathrm{U}_{eff})}}\,dr \\ d\varphi = \frac{l}{mr^2}dt \end{cases}$, quindi

$$d\varphi = \frac{l}{mr^2}\sqrt{\frac{m}{2(E-\mathrm{U}_{eff})}}\,dr = \frac{l}{r^2}\sqrt{\frac{m}{2m^2\left(E-\frac{l^2}{2mr^2}+\frac{\alpha}{r}\right)}} = \frac{\frac{l}{r^2}}{\sqrt{2mE+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{l^2}{r^2}}}\,\mathrm{dr} = \frac{\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{r}^2}}{\sqrt{\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{r}}-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{r}^2}}}\,\mathrm{dr}\ ,$$

dove si è posto $\begin{cases} A = 2mE \\ B = 2m\alpha \\ C = l^2 \end{cases}$. Integrando si ha $d\varphi = \frac{\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{r}^2}}{\sqrt{\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{r}}-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{r}^2}}}\,\mathrm{dr} \Rightarrow \varphi = \int \frac{\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{r}^2}}{\sqrt{\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{r}}-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{r}^2}}}\,\mathrm{dr}$ +k,

con k costante arbitraria. Per risolvere l'integrale facciamo la sostituzione $\beta = \frac{1}{r}$, da cui

$d\beta = -\frac{1}{r^2}dr$, ottenendo $\varphi = \int \frac{\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{r}^2}}{\sqrt{\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{r}}-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{r}^2}}}\,\mathrm{dr} = -\mathrm{l}\int \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{B}\beta-\mathrm{C}\beta^2}} + \mathrm{k}$.

Ricordando che un polinomio di 2° grado completo si può scrivere come

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] =$$

$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$, nel nostro caso il trinomio si può scrivere

$$-C\beta^2+B\beta+A = -C\left[\left(\beta-\frac{B}{2C}\right)^2-\frac{B^2+4AC}{4C^2}\right] = -C\left(\gamma^2-\frac{B^2+4AC}{4C^2}\right) = -C\gamma^2+\frac{B^2+4AC}{4C^2}\ ,$$

dove si è posto $\gamma = \beta - \frac{B}{2C}$ da cui $d\gamma = d\beta$. Allora si ottiene

$$\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{B}\beta-\mathrm{C}\beta^2} = \sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{B}\left(\gamma+\frac{B}{2C}\right)-\mathrm{C}\left(\gamma+\frac{B}{2C}\right)^2} = \sqrt{\frac{4AC+B^2}{4C}-C\gamma^2}.$$

L'integrale allora diviene $-\mathrm{l}\int \frac{\mathrm{d}\beta}{\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{B}\beta-\mathrm{C}\beta^2}} = -\mathrm{l}\int \frac{\mathrm{d}\gamma}{\sqrt{\frac{4AC+B^2}{4C}-C\gamma^2}} - \mathrm{l}\int \frac{\mathrm{d}\gamma}{\sqrt{\mathrm{C}\left(\frac{4AC+B^2}{4C^2}-\gamma^2\right)}} =$

$$-\frac{l}{\sqrt{C}}\int\frac{d\gamma}{\sqrt{\frac{4AC+B^2}{4C^2}-\gamma^2}}=-\frac{l}{\sqrt{C}}\int\frac{d\gamma}{\sqrt{\frac{4AC+B^2}{4C^2}\left(1-\frac{\gamma^2}{\frac{4AC+B^2}{4C^2}}\right)}}==-\frac{l}{\sqrt{C}}\sqrt{\frac{4C^2}{4AC+B^2}}\int\frac{d\gamma}{\sqrt{1-\frac{4C^2}{4AC+B^2}\gamma^2}}$$

da cui posto $\delta=\frac{2C}{\sqrt{4AC+B^2}}\gamma$, donde $d\delta=\frac{2C}{\sqrt{4AC+B^2}}d\gamma$ quindi $d\gamma=\frac{\sqrt{4AC+B^2}}{2C}d\delta$, si ha

$$\varphi=-\frac{l}{\sqrt{C}}\ \frac{2C}{\sqrt{4AC+B^2}}\frac{\sqrt{4AC+B^2}}{2C}\int\frac{d\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}=-\frac{l}{\sqrt{C}}\arccos\delta=arccos\frac{\frac{l}{r}-\frac{m\alpha}{l}}{\sqrt{2mE+\frac{m^2\alpha^2}{l^2}}}+k$$

è l'integrale generale dell'equazione differenziale $\dot{\varphi}\ (t)=\frac{l}{mr^2(t)}$ che rappresenta la conservazione del momento angolare. Determiniamo allora per quali condizioni iniziali è individuato l'integrale particolare relativo al valore $k=0$.

Si ha:

$$\varphi=\arccos\frac{\frac{l}{r}-\frac{m\alpha}{l}}{\sqrt{2mE+\frac{m^2\alpha^2}{l^2}}}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{\frac{l}{r}-\frac{m\alpha}{l}}{\sqrt{2mE+\frac{m^2\alpha^2}{l^2}}}=\frac{\frac{l^2-m\alpha r}{rl}}{\sqrt{m\frac{2El^2+m\alpha^2}{l^2}}}=\frac{l^2-m\alpha r}{rl}\frac{l}{\sqrt{m}\sqrt{2El^2+m\alpha^2}}=$$

$$\frac{l^2-m\alpha r}{r\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{m\alpha^2\left(1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}\right)}}$$

Posto allora $e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}}$ e $p=\frac{l^2}{m\alpha}$, rappresentanti rispettivamente l'eccentricità e il parametro della conica, ossia dell'orbita dell'elettrone, si ottiene $\cos\varphi=\frac{l^2-m\alpha r}{rm\alpha}\cdot\frac{1}{e}=$

$$\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{l^2}{m\alpha}-1\right)\frac{1}{\mathrm{e}}=\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\mathrm{p}-1\right)\frac{1}{\mathrm{e}}\Rightarrow\mathrm{e}\cos\varphi=\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{r}}-1\Rightarrow\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{r}}=1+\mathrm{e}\cos\varphi\Rightarrow\mathrm{r}=\frac{\mathrm{p}}{1+\mathrm{e}\cos\varphi},$$

che è l'equazione polare dell'ellisse(3) con fuoco nell'origine O degli assi Oxy in quanto risulta $0<e<1$ avendosi

$$0<\sqrt{1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}}<1\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}}<1\\ \sqrt{1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2El^2}{m\alpha^2}<0\\ 1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}E<0\\ E>-\frac{m\alpha^2}{2l^2}\end{cases}\Rightarrow-\frac{m\alpha^2}{2l^2}<E<0$$

ovvero le condizioni del moto legato ad orbite finite.

La condizione $\mathrm{e} = 0$ di conica con eccentricità nulla, ovvero la circonferenza, equivale a $\sqrt{1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}} = 0$ $\Rightarrow \frac{2El^2}{m\alpha^2} = -1 \Rightarrow \mathrm{E} = -\frac{\mathrm{m}\alpha^2}{2\mathrm{l}^2}$ ordinata del punto $\mathrm{M}\left(\frac{l^2}{m\alpha}, -\frac{\mathrm{m}\alpha^2}{2\mathrm{l}^2}\right)$di minimo assoluto della funzione $\mathrm{U}_{eff}(r)$, per cui il moto è circolare con centro in O se il raggio è $r = \frac{l^2}{m\alpha}$ **,** cosa che pure si poteva dedurre ponendo $e = 0$ nell'equazione polare $\mathrm{r} = \frac{\mathrm{p}}{1+\mathrm{e}\cos\varphi} \Rightarrow\ p = r \Rightarrow r = \frac{l^2}{m\alpha}$.

Notiamo ora che la condizione $e > 1$ relativa all'iperbole ed $e = 1$ relativa alla parabola, ossia orbite non chiuse, corrispondono alla condizione $\sqrt{1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}} \geq 1 \Rightarrow \frac{2El^2}{m\alpha^2} \geq 0 \Rightarrow E \geq 0$ relativa alle ordinate non negative di $\mathrm{U}_{eff}(r)$.

Infine si ha l'equazione dell'orbita in coordinate cartesiane

$$p = r(1 + e\cos\varphi) \Rightarrow p = r + er\cos\varphi \Rightarrow p = r + ex \Rightarrow p - ex = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (p - ex)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow p^2 - 2epx + e^2x^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 + 2pex - p^2 = 0$$

Questo spiega perché il modello atomico di Rutherford è chiamato modello atomico planetario.

∴♣♠♣∴

Richiami di teoria

(1)

Impulso e quantità di moto

*Dato un punto materiale di massa m, considerati i vettori **v** velocità e **a** l' accelerazione del punto rispetto a un determinato sistema di riferimento inerziale, sia **F**(t) una forza applicata al punto variabile nel tempo. Si dice impulso elementare all'istante t il vettore* $d\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}(t)dt$

Mentre si dice impulso relativo all'intervallo temporale (t_0, t_1) *il vettore* $\boldsymbol{I} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}(t)dt$.

Si definisce quantità di moto del punto materiale il vettore $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}$.

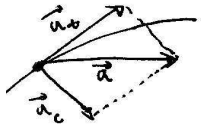
Il teorema dell'impulso afferma che la variazione della quantità di moto di un punto materiale nell'intervallo di tempo (t_0, t_1) *è uguale all'impulso relativo a tale intervallo della forza agente sul punto. Ciò è una diretta conseguenza del 2°principio della Dinamica (legge fondamentale del moto) avendosi che:*

$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$, *da cui moltiplicando per dt segue* $\boldsymbol{F}dt = m\,d\boldsymbol{v} \Rightarrow$

$\boldsymbol{I} = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{F}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} m\,d\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v}_1 - m\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0 = \Delta\boldsymbol{p}$, *cioè* $\boldsymbol{I} = \Delta\boldsymbol{p}$.

Teorema delle forze vive (dell'energia cinetica)

E' già noto allo studente che l'accelerazione vettoriale $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_c$ *in un punto della traiettoria seguita nello spazio da un punto materiale si può scomporre nelle due componenti* $\boldsymbol{a}_t$ *accelerazione tangenziale e* $\boldsymbol{a}_c$*accelerazione centripeta o normale, aventi*



come moduli rispettivamente $a_t = \frac{dv}{dt}$ *e* $a_c = \frac{v^2}{r}$

L'accelerazione tangenziale rappresenta la variazione istantanea della velocità scalare in un intervallo infinitesimo di tempo dt ed è responsabile della variazione del modulo della velocità, mentre l'accelerazione centripeta determina di quanto deve curvarsi la traiettoria, essendo ininfluente sulla variazione scalare della velocità.Si ha che $\boldsymbol{a}_t$ *ha la direzione della tangente nel punto alla traiettoria, mentre* $\boldsymbol{a}_c$*ha quello della normale alla traiettoria nel punto.*

Sempre dalla legge fondamentale del moto segue che $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m(\boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_c) = m\boldsymbol{a}_t + m\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_c$ *, dove* $F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{ds}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2}$ *è il modulo della forza tangenziale* $\boldsymbol{F}_t$ *che serve a far accelerare o rallentare il moto lungo la traiettoria, mentre* $F_c = m\frac{v^2}{r}$ *è il modulo della forza centripeta* $\boldsymbol{F}_c$ *ed ha la funzione di far deviare il punto materiale dalla traiettoria rettilinea.Osserviamo che* $\boldsymbol{F}_t$*, essendo parallela allo spostamento d*$\boldsymbol{s}$*, fa durante il moto tutto il lavoro, mentre* $\boldsymbol{F}_c$*non compie lavoro essendo perpendicolare a d*$\boldsymbol{s}$*. Quindi il lavoro di* $\boldsymbol{F}_t$ *fa variare l'energia cinetica durante il moto del punto materiale, mentre* $\boldsymbol{F}_c$*non contribuisce alla variazione di energia cinetica.*

Il <u>teorema dell'energia cinetica</u> afferma che <u>il lavoro di una forza è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale</u>. Infatti essendo $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}dt$ *lo spostamento infinitesimo lungo l'arco di curva percorsa dal punto materiale nell'intervallo di tempo infinitesimo dt, la forza* $\boldsymbol{F}(t)$ *variabile nel tempo in direzione e modulo, nell'intervallo di tempo dt compie il lavoro elementare*

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{F}_t + \boldsymbol{F}_c) \cdot d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{F}_t \cdot d\boldsymbol{s} + \boldsymbol{F}_c \cdot d\boldsymbol{s} = F_t ds \cos 0 + F_c ds \cos\frac{\pi}{2} = F_t ds = ma_t v dt = m\frac{dv}{dt} v dt = mvdv = \frac{1}{2}md(v^2) = d(\frac{1}{2}mv^2) .$$

Quindi integrando su un arco finito di traiettoria $s_1 s_2$*, si ottiene il lavoro della forza* $\boldsymbol{F}$ *lungo tale arco* $W = \int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\boldsymbol{v_1}}^{\boldsymbol{v_2}} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{\boldsymbol{v_1}}^{\boldsymbol{v_2}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_c^{(2)} - E_c^{(1)} = \Delta E_c$

da cui il teorema.

<u>Teorema della conservazione dell'energia</u>

Consideriamo un campo di forze di modo che un punto materiale sia soggetto a una forza $\boldsymbol{F}$ *variabile. Se* $P_1(x_1, y_2, z_3)$ *e* $P_2(x_2, y_2, z_2)$*sono gli estremi della traiettoria descritta dal punto materiale e* s_1, s_2 *i corrispondenti valori di ascissa curvilinea, consideriamo il lavoro compiuto dal campo per spostare il punto materiale da* P_1 *a* P_2*,* $W = \int_{s_1}^{s_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{s_1}^{s_2} F \cos\alpha \, ds$

Se esiste una funzione potenziale $E_p(x, y, z)$ *tale che* $W = E_{P_1} - E_{P_2} = \Delta E_p$*, il lavoro dipende solo dalla posizione dei punti* P_1 *e* P_2*, ma non dalla traiettoria seguita dal punto materiale per passare da* P_1 *a* P_2*, il campo si dice <u>conservativo</u>. Diremo quindi che un campo si dice conservativo se ammette una funzione potenziale (primitiva di una forma differenziale esatta).*

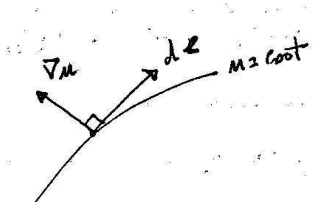
Il teorema *<u>della conservazione dell'energiameccanica</u> afferma chela somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica risulta costante nel tempo relativamente alla posizione del punto materialesulla traiettoria percorsa.*
Infatti per il teorema dell'energia cinetica si ha $W = \Delta E_c$*, ma, essendo il campo conservativo, esiste una funzione potenziale* E_p *per cui* $W = \Delta E_p$ *, da cui segue*

$\Delta E_c = \Delta E_p \Rightarrow E_c^{(2)} - E_c^{(1)} = E_p^{(1)} - E_p^{(2)} \Rightarrow E_c^{(1)} + E_p^{(1)} = E_c^{(2)} + E_p^{(2)} = E_c + E_p = cost$.
$Il\ campo\ di\ forza, eseguendo\ un\ lavoro\ per\ spostare\ il\ punto\ materiale,$ *possiede quindi un'energia che rivela durante il moto del punto. Allora se* $P(x, y, z)$*è un punto del campo in cui l'energia potenziale ha valore* $E_p(x, y, z)$*, diciamo che il punto P ha l'energia di posizione* E_p*. Esempi di campi conservativi sono il campo gravitazionale e il campo elettrico.*
Ora approfondirò il concetto di campo conservativo usando strumenti matematici più avanzati, precisando che quanto segue non è necessario per la comprensione dell'articolo sull'atomo di Rutherford.
In una regione dello spazio sia definita, continua e derivabile una funzione $u = u(x, y, z)$ *in modo che a ogni punto dello spazio è associato un unico valore di u, come ad esempio si può far corrispondere a ogni punto il valore della temperatura in quel punto. La variazione infinitesima di tale funzione per passare da un punto* $P(x, y, z)$*A un punto* $Q(x + dx, y + dy, z + dz)$ *ad esso infinitamente prossimo, è dato dal differenziale* $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$ *della funzione u , che è uno scalare . Se ora* $d\boldsymbol{l} = (dx, dy, dz) = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$ *è il vettore rappresentante l'incremento per passare da P a Q, il differenziale du risulta essere il prodotto scalare tra il vettore* $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$*, avente come componenti le derivate parziali di u, e il vettore incrementi infinitesimo* $d\boldsymbol{l}$ *. Conviene allora definire come vettore <u>gradiente</u> della funzione scalare u, il vettore* $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ *, che, introducendo l'operatore vettoriale"nabla"(o anche "del")*

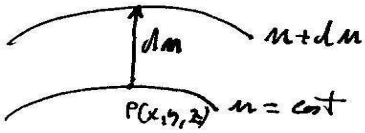
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$ *, si può scrivere* $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ *, ovvero definire* $grad\ u = \nabla u$ *.*

Detto ciò, il differenziale di u si può scrivere nella forma di prodotto scalare $du = \nabla u \cdot d\boldsymbol{l}$ *tra i due vettori* ∇u *e* $d\boldsymbol{l}$*.*
Si può verificare che effettivamente il gradiente di u è un vettore perché covariante per rotazioni, ma di ciò non dico nulla in questa sede rinviando gli alunni interessati al mio studio sulla meccanica celeste e le leggi di Keplero. Una proprietà del gradiente è quella di essere ortogonale alle superfici di livello u = cost.

Infatti, per uno spostamento infinitesimo $d\boldsymbol{l}$ *su una superficie di livello, da* $u = cost \Rightarrow$



$du = 0 \Rightarrow \nabla u \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \Rightarrow |\nabla u| dl \cos(\widehat{\nabla u, d\boldsymbol{l}}) = 0 \Rightarrow \cos(\widehat{\nabla u, d\boldsymbol{l}}) = 0 \Rightarrow \widehat{\nabla u, d\boldsymbol{l}} = 90°.$
Sia ora $d\boldsymbol{n}$ *un vettore normale alla superficie di livello passante per* P.



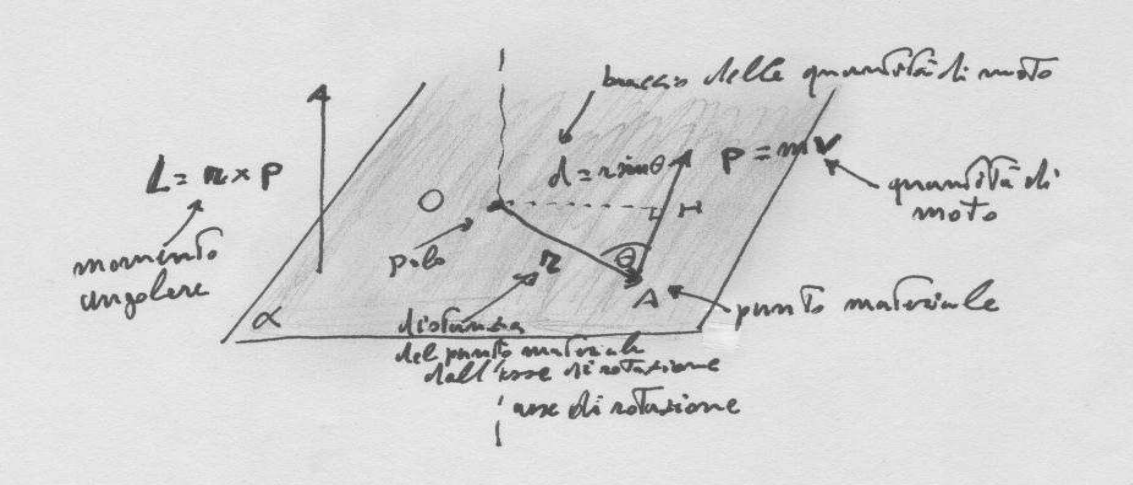
La variazione du *che subisce la funzione u per effetto dello spostamento* $d\boldsymbol{n}$ *è data da* $du = \nabla u \cdot d\boldsymbol{n} = |\nabla u||d\boldsymbol{n}| \cos 0 = |\nabla u| dn \Rightarrow \frac{du}{dn} = |\nabla u|$, *il che porta a definire il rapporto*
$\frac{du}{dn} = |\nabla u|$ *come la* <u>*derivata direzionale*</u> *della funzione* $u(x, y, z)$ *nella direzione* ***n****, valore assoluto del gradiente di* ***n****. Ora noi sappiamo che è possibile associare ad ogni punto* $P(x, y, z)$*dello spazio il vettore gradiente* $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ *in modo che dalla funzione regolare u possiamo dedurre un campo vettoriale* $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$, *dove* $v_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $v_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_z = \frac{\partial u}{\partial z}$.
Ci poniamo ora il problema di poter stabilire se è possibile il processo inverso, cioè dato un campo vettoriale $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$, *dove* $\boldsymbol{v}$ *è una funzione del punto* $P(x, y, z)$, *se esiste una funzione* $u = u(x, y, z)$ *tale che le sue derivate parziali* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ *siano le componenti del vettore* $\boldsymbol{v}$ **.**
Non sempre ciò accade, ma in caso affermativo, il campo vettoriale $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ *si dice* <u>*conservativo*</u> *e la funzione* $u = u(x, y, z)$ *prende il nome di* <u>*funzione potenziale*</u> *del campo, essendo in ogni punto P del campo* $\boldsymbol{v}$ *le componenti di* $\boldsymbol{v}$ *le derivate parziali della funzione u.*
A riguardo è fondamentale il seguente teorema: condizione necessaria e sufficiente affinché il campo $\boldsymbol{v}$ *sia conservativo, è che la circuitazione di* $\boldsymbol{v}$ *sia nulla per ogni curva chiusa* $\mathcal{C}$ *lungo la quale si calcola l'integrale, cioè si abbia qualunque sia* $\mathcal{C}$, $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$.
Invero la condizione è necessaria perché, nell'ipotesi che il campo sia conservativo, deve esistere una funzione regolare $u(x, y, z)$ *tale che in ogni punto* $P(x, y, z)$ *del campo si abbia* $\boldsymbol{v} = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ *,ovvero* $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = \nabla u \cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l}$.
Allora dalla $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = d\boldsymbol{u}$ *segue integrando lungo una qualsiasi curva* $\mathcal{C}$ *di estremi A e B, che* $\int_A^B \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_A^B du = u(B) - u(A)$, *donde per* $A \equiv B$ *si ha* $u(B) = u(A)$ *e quindi* $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$. *Viceversa la condizione è sufficiente. Infatti per ogni curva chiusa* $\mathcal{C}$ *dello spazio, se si ha* $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$, *poiché il prodotto scalare* $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = v \cos \alpha dl$ *è*

un'espressione differenziale scalare, deve esistere una funzione differenziabile $u(x,y,z)$ *tale che* $du = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l}$ *peri punti* $P \in \mathcal{C}$*, da cui risulta allora* $\oint_{\mathcal{C}} du = 0$ *e che* $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_{\mathcal{C}} du$*.*
Si può provare che l'uguaglianza $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = du$ *che vale per tutti i punti della curva* $\mathcal{C}$*, vale pure per tutti i punti dello spazio e quindi possiamo scrivere che per ogni punto* $P(x,y,z)$*, dello spazio si ha* $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l} = du = \nabla u \cdot d\boldsymbol{l} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \nabla u$*. Abbiamo allora provato che esiste una funzione regolare* $u = u(x,y,z)$ *tale che per ogni vettore* $\boldsymbol{v}$ *del campo si abbia* $\boldsymbol{v} = \nabla u$*, cioè il campo è conservativo.*
Un esempio di campo conservativo è il campo gravitazionale. Infatti per una limitata zona dello spazio consideriamo l'energia potenziale $\mathcal{V}(x,y,z) = \mathcal{V}(z) = mgz$ *e poniamo* $u = -\mathcal{V}(z) = mgz$*.*
Si ha che $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} \Rightarrow (F_x, F_y, F_z) = (0,0,-mg)$ *e* $\nabla u = \left(\frac{\partial(-mgz)}{\partial x}, \frac{\partial(-mgz)}{\partial y}, \frac{\partial(-mgz)}{\partial z}\right)$ $= (0,0,-mg) = -(0,0,mg) = -\nabla\mathcal{V}$*, quindi* $\boldsymbol{F} = \nabla u = -\nabla\mathcal{V}$*, significando ciò che la forza di gravità è conservativa così come lo è il campo gravitazionale.*
Allora per ogni punto $P(x,y,z)$ *dello spazio si ha che* $(F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ *e* $du = \nabla u \cdot d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$*, quindi integrando lungo una qualsiasi curva* $\mathcal{C}$ *di estremi A e B, si ha* $L = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} du = u(B) - u(A) = \mathcal{V}(A) - \mathcal{V}(B)$*. Il lavoro* W *compiuto dalla forza* $\boldsymbol{F}$ *per spostare un punto materiale lungo la generica curva* $\mathcal{C}$ *da A a B, dipende solo dagli estremi della curva ma non dipende dal tipo di curva.*
Per il teorema dell'energia cinetica, il lavoro della forza applicata è uguale alla variazione dell'energia cinetica $\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2$ *del punto materiale, cioè* $W = \mathcal{E}(B) - \mathcal{E}(A)$*, da cui segue sostituendo nella relazione sopra* $\mathcal{V}(A) - \mathcal{V}(B) = \mathcal{E}(B) - \mathcal{E}(A) \Rightarrow \mathcal{E} + \mathcal{V} = cost$*, ovvero* $E_c + E_p = cost$*.*
Questo risultato prende il nome di <u>*teorema di conservazione dell'energia meccanica*</u>*: in un campo conservativo è costante la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. Ecco il motivo del nome conservativo! Lo stesso discorso si può fare per il campo elettrico che risulta anch'esso conservativo.*

<u>*Momento angolare (polare) o momento della quantità di moto (impulso angolare)*</u>

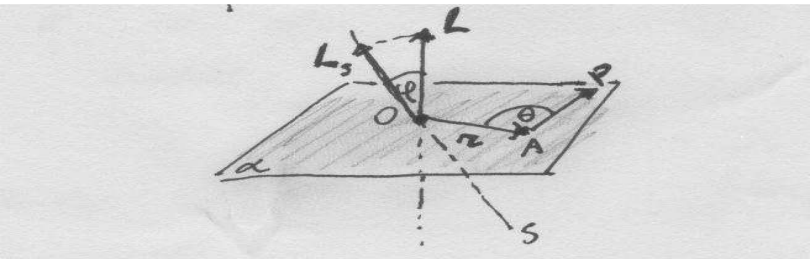
Introduciamo un vettore caratterizzato numericamente dalla quantità di moto di un punto materiale di massa m e dalla distanza della direzione del vettore quantità di moto da un punto fisso dello spazio detto polo non appartenente a tale direzione, il quale risulti normale al piano individuato dal vettore quantità di moto e dal polo, quindi un verso dipendente dal verso del moto del punto materiale. Sia quindi A un punto materiale di massa m e O un punto dello spazio che assumiamo come polo, origine di una terna cartesiana di riferimento Oxyz, sia inoltre $\boldsymbol{r} = A - O$ *il vettore posizione del punto A rispetto a O e* $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ *la quantità di moto del punto materiale. Se* θ *è l'angolo formato da* $\boldsymbol{r}$ *e* $\boldsymbol{p}$*, si definisce* <u>*momento della quantità di moto*</u> *o* <u>*momento angolare*</u> $\boldsymbol{L}$ *il prodotto vettoriale* $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ *.*

Il vettore $\boldsymbol{L}$ *ha modulo* $L = rmv\sin\theta$*, direzione perpendicolare al piano* α *individuato da* ***r*** *e* ***p****, verso quello di un osservatore disposto nel senso piedi- testa lungo la perpendicolare ad* α *, il quale vede ruotare* ***p*** *in senso antiorario, punto di applicazione qualsiasi. Si dice* <u>*braccio*</u> *della quantità di moto* ***p****, la distanza OH dell'asse di rotazione in O dalla retta che determina la direzione di* ***p****.*



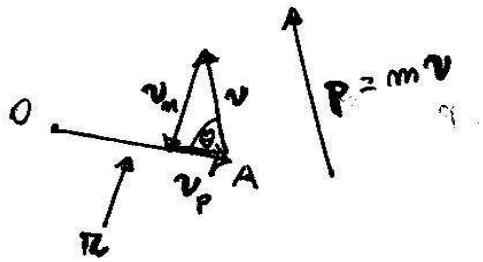
Se ***p*** *e* ***r*** *sono perpendicolari, allora* $\theta = 90° \Rightarrow \sin 90° = 1$ *e il momento angolare è massimo, mentre se* ***p*** *oppure* ***r*** *sono nulli o paralleli si ha* $\boldsymbol{L} = 0$*, in quanto in quest'ultimo caso risulta* $\theta = 0 \Rightarrow \sin 0 = 0$.

Sempre riferendoci al piano α *, detto s un qualsiasi asse passante per il polo O, si definisce* <u>*momento angolare assiale*</u> *il momento* $\boldsymbol{L}_s$*componente del momento* $\boldsymbol{L}$ *lungo l'asse s, il cui modulo è* $L_s = L\cos\varphi$*, dove* φ *è l'angolo tra l'asse s e la direzione di* $\boldsymbol{L}$ *applicato in O.*



Il momento angolare $\boldsymbol{L}$ *ha dimensioni*$[L] = [rmv\sin\theta] = [ml \cdot {}^{l}/_{s}] = [ml^2s^{-1}]$*, per cui nel S.I. si misura in* $kg \cdot {}^{m^2}/_{s}$.

Ritornando al momento angolare rispetto al polo O, la lunghezza del vettore $\boldsymbol{L}$ *si può scrivere nel modo alternativo seguente. Scomposto il vettore velocità* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_p + \boldsymbol{v}_n$ *nelle due componenti* $\boldsymbol{v}_p$*parallela al vettore posizione* $\boldsymbol{r}$ *e* $\boldsymbol{v}_n$ *normale alla direzione di* $\boldsymbol{r}$ *, si ha, passando ai moduli, la relazione utile per il seguito* $v_n = v\sin\theta \Rightarrow L = rmv\sin\theta = rmv_n$.



Passiamo ora alle relazioni descriventi i sistemi meccanici complessi.

Un sistema di punti materiali o sistema di masse è l'insieme di corpi puntiformi o estesi, definendo come <u>sistema discreto</u> il primo caso, <u>sistema continuo</u> il secondo.

<u>Equazioni cardinali del moto</u>

Si tratta di due equazioni di cui, la prima descrive il moto traslatorio di un sistema, mentre la seconda il moto rotatorio

<u>1^a Equazione cardinale del moto</u>

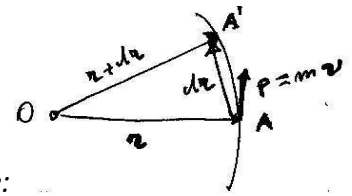
Questa equazione descrive il moto traslatorio di un sistema discreto rispetto a un sistema cartesiano Oxyz, risultando da essa che il <u>centro di massa</u> o <u>baricentro</u> del sistema (etimologicamente centro del peso) si muove come un punto materiale avente massa $M = \sum_i m_i$ uguale alla massa totale del sistema e soggetto a una forza $\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i$ risultante delle forze agenti sul sistema.
Se poi $\boldsymbol{p} = \sum_i \boldsymbol{p}_i$ è la quantità di moto risultante del sistema , allora il vettore posizione $\boldsymbol{r}_G$ del baricentro G rispetto al centro degli assi O, ha espressione $\boldsymbol{r}_G = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i$, dove $\boldsymbol{r}_i$ sono i raggi vettori dei punti materiali rispetto al sistema di riferimento usato ($\boldsymbol{r}_G$ risulta essere la media pesata delle posizioni di tutti i punti nello stesso istante).
Tale definizione di baricentro risulta essere un caso particolare di quella più generale delle coordinate del punto di applicazione di un sistema di forze parallele. Nel caso di un sistema continuo, le sommatorie sono sostituite da integrali estesi al dominio occupato dal sistema. Introducendo la funzione scalare densità $\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{dm}{dV}$, la posizione del baricentro è data da $\boldsymbol{R} = \frac{1}{M}\int_V \boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r})dV$, dove $M = \int_V \rho(\boldsymbol{r})dV$, osservato che nel caso particolare di un sistema continuo omogeneo, la densità è costante.
Riferendoci al caso di un sistema discreto di punti materiali, supposto che per le forze interne valga il principio di azione e reazione, la <u>1^a equazione cardinale del moto afferma che il baricentro di un sistema ha lo stesso moto di un singolo punto materiale nel quale è virtualmente concentrata l'intera massa del sistema e sul quale agisce la risultante delle sole forze esterne al sistema</u>.
Detta $\boldsymbol{a}_G$ l'accelerazione del baricentro, la cui espressone è $\boldsymbol{a}_G = \frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{M}\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2}$, si tratta di provare che $\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = M\boldsymbol{a}_G$.
Infatti $\boldsymbol{F} = \sum_i m_i \boldsymbol{a}_i = \sum_i m_i \frac{d\boldsymbol{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}$, per cui la risultante delle forze esterne è uguale alla variazione della quantità di moto del sistema. Allora, poiché si ha $\boldsymbol{F} = \sum_i \boldsymbol{F}_i = M\frac{\sum_i \boldsymbol{F}_i}{M} = M\left(\frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}\right) = M\boldsymbol{a}_G$, ciò significa che il moto del baricentro rappresenta il moto dell'intero sistema.

<u>2^aequazione cardinale del moto</u>

Se un punto materiale si muove con quantità di moto $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$*, il momento angolare o momento della quantità di moto rispetto a un generico punto O è dato da* $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{p}(t)$*, dove t è il tempo.*
Se inizialmente supponiamo il polo O in quiete in un determinato sistema di riferimento Ωxyz*, notiamo che per la* 2^a*equazione della dinamica deve aversi* $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$*, ovvero la variazione della quantità di moto del punto materiale è causata da una forza* $\boldsymbol{F}$ *agente sul punto, il cui momento (meccanico) rispetto al polo O è dato da* $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$*.*
Si definisce come <u>momento dell'impulso</u> di **F** *rispetto al polo O, il prodotto* $\boldsymbol{M}_0 dt$ *del momento della forza* **F** *per l'intervallo di tempo in cui detta forza agisce.*
Derivando rispetto al tempo la relazione $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{p}(t)$ *, si ha*

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{p}(t)) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \times \boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{r}(t) \times \frac{d\boldsymbol{p}(t)}{dt} = \boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$
$$= \boldsymbol{v}(t) \times m\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{M}_0$$

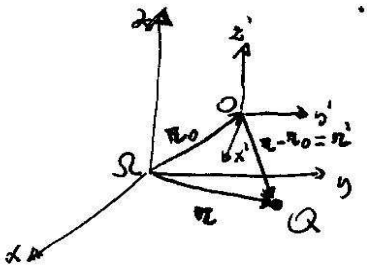
cioè la 2^a*equazione cardinale del moto* $\boldsymbol{M}_0 = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$*. Questa s'interpreta dicendo che in ogni istante la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto* $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$ *di un punto materiale rispetto a un polo fisso O, coincide con il momento* $\boldsymbol{M}_0$*rispetto allo stesso polo della risultante* $\boldsymbol{F}$ *di tutte le forze agenti su tale punto (teorema del momento della quantità di moto).*
Se scriviamo la seconda equazione cardinale come $d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}_0 dt$ *, tale espressione indica che la variazione della quantità di moto è uguale al momento dell'impulso della forza rispetto al polo O. Ciò si può anche dedurre dalle seguenti considerazioni.*
Riferendoci a un sistema nello spazio Ωxyz*, se su un punto materiale di massa m che si muove con velocità* $\boldsymbol{v}$*, agisce una forza* $\boldsymbol{F}$ *in un determinato punto A della sua traiettoria, esso è sottoposto a un'accelerazione che causa nell'intervallo infinitesimo dt una variazione* $d\boldsymbol{v}$ *della sua velocità* $\boldsymbol{v}$ *e una variazione della sua distanza* $\boldsymbol{r}$ *da O uguale a* $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$*. La variazione del momento della quantità di moto è allora data da* $d\boldsymbol{L} = d(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{p}$*. Ma, essendo* $d\boldsymbol{r}$ *parallelo a* $\boldsymbol{p}$*, si ha* $d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = 0$*, da*



cui si ricava che: $d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times md\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a}dt = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}dt = \boldsymbol{M}_0 dt$ *,cioè la variazione infinitesima della quantità di moto è uguale al momento dell'impulso della forza. Questa relazione ha fondamentale importanza nella dinamica dei corpi girevoli intorno ad un asse.*
Integrando ambo i membri di essa, si ha una variazione in termini finiti del momento angolare

$$d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}_0 dt \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} d\boldsymbol{L} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_0 dt = \Rightarrow \Delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{M}_0 dt \,.$$

Vediamo ora l'importante <u>principio (o teorema) della conservazione del momento della quantità di moto</u>.
Supponiamo di avere un sistema di corpi su cui agiscono solo forze interne, essendo nulla la risultante delle forze esterne; siano $\boldsymbol{F}_1$ *e* $\boldsymbol{F}_2$ *le forze interne. Per il terzo principio della Dinamica deve aversi allora* $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = 0$ *, significando ciò che i momenti delle due forze rispetto al punto O sono uguali e di segno contrario, da cui moltiplicando per dt si ottiene* $\boldsymbol{M}_1 dt + \boldsymbol{M}_2 dt = 0$, *cioè il momento d'impulso complessivo è uguale a zero. Ma per la 2° equazione cardinale del moto, il momento d'impulso della forza è uguale alla variazione del momento della quantità di moto, donde deve aversi che* $d\boldsymbol{L}_1 + d\boldsymbol{L}_2 = 0 \Rightarrow d(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2) \Rightarrow \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 = cost$, *ovvero <u>il momento totale della quantità di moto rispetto a un generico punto O di un sistema di corpi tra i quali agiscono solo forze interne, è costante</u>. Questo è <u>il principio di conservazione del momento angolare</u>, del quale si è fatto uso per spiegare il modello atomico do Rutherford.*
Ma se anche il polo O si muove? Per rispondere a tale interrogativo, torniamo alla 2° equazione cardinale del moto nel caso che il polo O sia fermo nel riferimento Ωxyz, cioè alla relazione $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}_0$, *la quale appunto afferma che la derivata rispetto al tempo del momento* $\mathbf{L}$ *della quantità di moto di un punto materiale Q rispetto all'origine O del sistema* $Ox'y'z'$ *di riferimento, è uguale al momento* $\boldsymbol{M}_0$ *della risultante delle forze agenti sul punto materiale Q rispetto a O.*
Se ora O si muove con velocità $\boldsymbol{v}_0$ *rispetto alla terna Ωxyz, sia* $\boldsymbol{r}_0$ *il vettore posizione del polo O rispetto a Ωxyz,* $\boldsymbol{r}$ *il vettore posizione del punto Q rispetto a Ωxyz,* $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ *il vettore posizione del punto Q rispetto alla terna* $Ox'y'z'$.



Derivando rispetto al tempo il vettore $\boldsymbol{r}'$ *si ottiene* $\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{r}_0}{dt} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}'$ *che risulta essere la velocità del punto materiale Q rispetto al sistema* $Ox'y'z'$. *Ci proponiamo ora di calcolare la derivata del momento della quantità di moto del punto Q nel sistema Ωxyz rispetto al polo O in moto relativo rispetto a Ωxyz. Poiché* $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, *si ha*

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{p}) = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}' \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \left[\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\right] \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}' \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) \times \boldsymbol{p} +$$

$$\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} - \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{M}'_0 = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{M}'_0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}'_0 - \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{p}\,.$$

Tale risultato esprime il fatto che <u>la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto del punto materiale Q rispetto ad un polo O arbitrario in moto</u>

relativo rispetto ad un sistema di riferimento Ωxyz, è uguale al momento $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{0}}'$ *della forza* $\boldsymbol{F}$ *agente sul punto materiale Q rispetto a O detratto del prodotto vettoriale* $\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{p}$ *tra la velocità relativa del polo O rispetto a Ωxyz e la quantità di moto Q.*
Questa è la formulazione della 2° equazione cardinale del moto nel caso che il polo O sia in moto relativo.
Nel caso che invece di un punto materiale abbiamo un sistema discreto di punti $Q_1, Q_2, \cdots, Q_n$ *, detta* $\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{0}}$ *il vettore posizione del punto i-mo, con i=1,2,…,n, nel sistema di riferimento* $Ox'y'z'$ *del polo O, si ha:*

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i\right) = \sum_i \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i) = \sum_i (\frac{d\boldsymbol{r}_i'}{dt} \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{r}_i' \times \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt}) =$$
$$\sum_i \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i + \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \frac{d\boldsymbol{p}_i}{dt} = \sum_i \left[\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{0}}) \times \boldsymbol{p}_i\right] + \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i =$$
$$\sum_i \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_i' - \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{0}}\right) \times \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{i}} + \sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{0}}' = \sum_i \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i - \sum_i \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{0}} \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{0}}' =$$
$$\sum_i \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{p}_i - \sum_i \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{0}}' = \sum_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{v}_i \times m\,\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0 \times \sum_i \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{0}}' =$$

$-\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{0}}'$ *, che in sostanza è la stessa equazione ottenuta per un punto materiale.*
Abbiamo detto che il principio della conservazione del momento della quantità di moto afferma la costanza nel tempo del momento della quantità di moto se sul sistema non agiscono forze esterne o anche se la risultante di queste ultime è nulla, implicando ciò che è nullo anche il momento risultante di queste rispetto a un arbitrario punto O.
Osserviamo allora che se $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ *è il momento della quantità di moto del sistema, con* $\boldsymbol{p}$ *quantità di moto applicata al baricentro e* $\boldsymbol{r}$ *è il vettore posizione del baricentro rispetto all'asse di rotazione, dalla 2° equazione cardinale del moto risulta per* $\boldsymbol{M}_0 = 0$
che $\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}_0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L} = cost$*, per cui* $\boldsymbol{L}$ *si "conserva" nel moto.*
Notiamo pure che nel caso che si verifica almeno una delle eventualità:

1. $\boldsymbol{F}$*=0 , ossia la forza esterna è nulla (sistema è isolato)*
2. $\boldsymbol{r}$*=0 , cioè la forza* $\boldsymbol{F}$ *è applicata in un punto dell'asse di rotazione*
3. $\boldsymbol{r}$ *e* $\boldsymbol{F}$ *sono vettori paralleli per cui* $\boldsymbol{F}$ *ha direzione normale all'asse di rotazione*

si ha $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{L} = cost$*, tenendo presente che se è nullo il momento polare* $\boldsymbol{M}_0$*, allora deve essere nullo anche il momento assiale* $\boldsymbol{M}$*, componente di* $\boldsymbol{M}_0$ *rispetto all'asse di rotazione.*

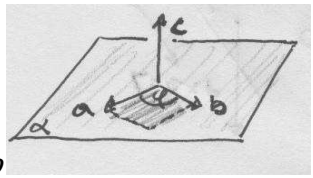
La costanza del momento angolare si applica all'analisi delle orbite dei pianeti e dei satelliti, inoltre, ed è quello che ci interessa in questa sede, si applica anche al modello atomico classico dell'atomo di Rutherford.

(2)

<u>Prodotto vettoriale di due vettori</u>

Se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ *sono due vettori applicati in un punto O dello spazio, detto* α *il piano da essi individuato, sia* φ *l'angolo orientato formato dalle direzioni di* $\boldsymbol{a}$ *e di* $\boldsymbol{b}$ *.*

Il vettore $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ *<u>prodotto vettoriale</u> di* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$*, è un vettore avente direzione normale al piano* α*, modulo uguale all'area del parallelogramma di lati* $\boldsymbol{a}$ *e* $\boldsymbol{b}$*, verso tale che la terna* $\boldsymbol{a}$ *,* $\boldsymbol{b}$ *,* $\boldsymbol{c}$ *risulti levogira (un osservatore, con i piedi in O e la testa nel senso dell'orientamento di* $\boldsymbol{c}$*, vede ruotare su* α*, descrivendo un angolo convesso, il vettore* $\boldsymbol{a}$ *fino a sovrapporsi a* $\boldsymbol{b}$ *nel senso antiorario). Una notazione alternativa del prodotto vettoriale è* $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$



Dalla definizione si ricava che il prodotto vettoriale non è commutativo ma alternante, avendosi $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$*; si prova pure che per esso vale la proprietà distributiva* $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$ *.*

Utile è la seguente espressione simbolica del prodotto vettoriale $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Infatti valendo per i versori degli assi x,y,z le seguenti relazioni
$\begin{cases} \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0 \\ \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k};\ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i};\ \ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}' \end{cases}$ *si ha*

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\right) \times \left(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}\right) = a_xb_x\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + a_xb_y\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + a_xb_z\ \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} +$$

$$a_yb_x\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} + a_yb_y\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} + a_yb_z\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} + a_zb_x\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + a_zb_y\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} + a_zb_z\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} =$$

$$a_xb_y\boldsymbol{k} - a_xb_z\ \boldsymbol{j} - a_yb_x\boldsymbol{k} + a_yb_z\boldsymbol{i} + a_zb_x\boldsymbol{j} - a_zb_y\boldsymbol{i}$$
$$= \left(a_xb_y - a_yb_x\right)\boldsymbol{k} - (a_xb_z - a_zb_x)\boldsymbol{j} + \left(a_yb_z - a_zb_y\right)\boldsymbol{i} =$$

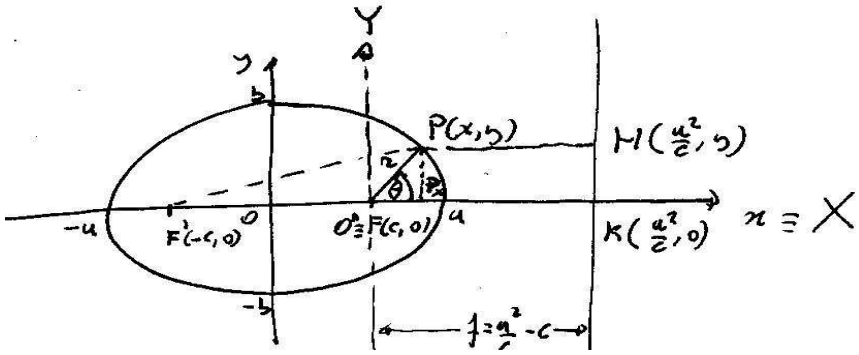
$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

(3)

<u>Equazione polare dell'ellisse</u>

Definiamo ellisse il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi. Se $F(c,0), F'(-c,0)$ *sono i fuochi la cui distanza è* $\overline{FF'} = 2c$ *e 2a la somma costante delle distanze di un punto dell'ellisse dai fuochi, tutti e soli i punti dell'ellisse P(x, y) devono essere tali che* $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$*, per cui devono soddisfare l'equazione* $\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a \Rightarrow$

$a\sqrt{x^2+c^2+2cx+y^2} = a^2+cx \Rightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$



Ora nel triangolo PFF' *deve aversi* $\overline{FF'} < \overline{PF} + \overline{PF'} \Rightarrow 2c < 2a \Rightarrow c < a \left(\Rightarrow 0 < \frac{c}{a} < 1\right) \Rightarrow c^2 < a^2 \Rightarrow a^2 - c^2 > 0$*, per cui ha senso porre* $b^2 = a^2 - c^2$*, donde sostituendo nella relazione sopra, si ricava* $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ *e dividendo per il termine a secondo membro si ottiene <u>l'equazione canonica dell'ellisse</u>* $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Il rapporto $e = \frac{c}{a}$*, dove per quanto visto* $0 < e < 1$*, prende il nome di <u>eccentricità</u> dell'ellisse e dà una stima di quanto l'ellisse, per la sua forma più o meno schiacciata, differisce dalla circonferenza, nella quale, avendosi* $e = 0 \Rightarrow c = 0$*, poiché* $b^2 = a^2 - c^2$*, segue* $b = a \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$*, equazione appunto della circonferenza.*

L'eccentricità e ha il notevole significato geometrico di essere il rapporto costante tra la distanza del punto P generico dell'ellisse dal fuoco F(c,0) e dalla retta direttrice d di equazione $x = \frac{a^2}{c}$ *(analogamente si verifica ciò per il fuoco* $F'(-c,0)$ *e la retta di equazione* $x = -\frac{a^2}{c}$ *).*

Si ha infatti che:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{\sqrt{(x-c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)}}{\frac{a^2-cx}{c}} = \frac{\sqrt{a^2(x-c)^2 + b^2(a^2-x^2)}}{a} \cdot \frac{c}{a^2-cx} =$$

$$\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2(x-c)^2 + (a^2-c^2)(a^2-x^2)}{(a^2-cx)^2}} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{c^2x^2 - 2a^2cx + a^4}{a^4 - 2a^2cx + c^2x^2}} = \frac{c}{a} = e$$

Si conclude che l'eccentricità dell'ellisse è $\boxed{e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{c}{a}}$.

Viceversa si può provare che, fissato un punto F e una retta d non passante per F, quindi un numero positivo $0 < e < 1$*, il luogo dei punti tali che il rapporto delle loro distanze da F e da d è uguale ad e, risulta essere un'ellisse di cui F è uno dei fuochi ed e è l'eccentricità.*

In generale si definisce conica il luogo di tutti e soli i punti P del piano tali che risulti costante il rapporto tra la distanza $\overline{PF}$ *di P da un punto fisso F detto fuoco e la distanza* $\overline{PH}$ *di P da una retta direttrice d non passante per Fe distante f dal fuoco F. Al rapporto costante* $e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}}$ *si dà il nome di eccentricità della conica, mentre al prodotto* $p = ef$ *quello di parametro della conica.*

Scegliamo ora un sistema di riferimento polare con polo in F e semiasse polare la semiretta orientata di origine F giacente sull'asse delle ascisse x e avente uguale orientamento, quindi operiamo la traslazione $\begin{cases} x - c = X \\ y = Y \end{cases}$ *che porta il sistema di riferimento* Oxy *nel nuovo sistema* $O'XY$ *in cui l'origine* O' *coincide col fuoco* $F(c, 0)$*. In tale riferimento le formule di trasformazione tra coordinate cartesiane e coordinate polari sono* $\begin{cases} X = r\cos\theta \\ Y = r\sin\theta \end{cases}$*, dove* $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ *è il modulo e* $\theta \in [0,2\pi)$ *è l'anomalia.*

Riferendoci al sistema Oxy*, le formule* $\begin{cases} x = c + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ *stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra i punti* $P(x, y)$ *del piano e la coppia di numeri reali* (r, θ)*, tranne che per il polo* $F(c, 0)$ *a cui si può attribuire qualsiasi valore di* θ*, essendo il modulo* $r = 0$*.*

Poiché $\overline{PF} = r$ *ed* $e = \frac{c}{a}$*, si ha* $\overline{PH} = \frac{a^2}{e} - x = \frac{a^2}{ae} - x = \frac{a}{e} - x = \frac{a-ex}{e}$*, da cui si ricava*

$$e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PH}} = \frac{r}{\frac{a-ex}{e}} = e\frac{r}{a-ex} \Rightarrow 1 = \frac{r}{a-ex} \Rightarrow r = a - ex.$$

Essendo inoltre $\overline{P_xF} = x - c = \overline{PF}\cos\theta = r\cos\theta$*, si ha in definitiva* $\begin{cases} r = a - ex \\ x = r\cos\theta + c \end{cases}$*, da cui sostituendo otteniamo* $r = a - e(r\cos\theta + c) = (a - ec) - er\cos\theta = p - er\cos\theta \Rightarrow$

$r(1 - e\cos\theta) = p \Rightarrow \boxed{r = \frac{p}{1-e\cos\theta}}$*,dove si è posto il parametro p, distanza del fuoco dalla direttrice d,* $p = \frac{a^2}{c} - c = a\frac{a}{c} - c = ae - c$*.Questa è l'equazione polare dell'ellisse.*

Per l'iperbole e la parabola si possono fare ragionamenti simili, ottenendo per l'iperbole la stessa equazione dell'ellisse, dove però $e > 1$ *e* $p = ec - a$*, mentre per la parabola si ha l'equazione polare* $r = \frac{p}{1+\cos\theta}$ *con* $e = 1$*.*