Formule di rotazione

Prof. Giuseppe Caputo

Voglio in quest'articolo mostrare un modo semplice per ricavare le formule di rotazione degli assi.

Sia Oxy il "vecchio"sistema di coordinate cartesiane e Ox'y' il "nuovo"sistema di coordinate.

Ci proponiamo di trovare le formule di trasformazione per una rotazione di un angolo θ orientato positivamente del nuovo sistema rispetto al vecchio.

Si ha che sono congrui gli angoli, entrambi uguali a θ, $\widehat{POH} \equiv \widehat{PHK}$, in quanto PH è perpendicolare a OH e HK è perpendicolare a OP, cioè i lati degli angoli sono a due a due perpendicolari.

Quindi, ricordando le relazioni trigonometriche nei triangoli rettangoli:

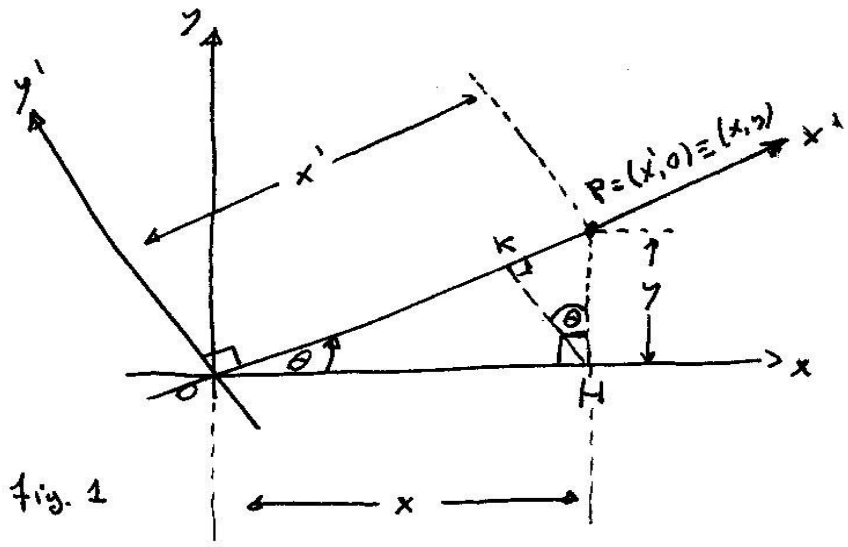


fig. 1

$$x' = \overline{PO} = \overline{PK} + \overline{KO} = \overline{PH}\sin\theta + \overline{OH}\cos\theta = ysin\,\theta + xcos\,\theta \xrightarrow{yields} \boxed{x' = xcos\,\theta + ysin\,\theta}$$

Ripetendo le stesse considerazioni per un angolo $90° + \theta$, il punto $P(x', 0) \equiv (x, y)$ diviene il punto $Q(0, y') \equiv (x, y)$, per cui si ha

$$y' = ysin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + xcos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = ycos\,\theta - xsin\,\theta \xrightarrow{yields} \boxed{y' = -xsin\,\theta + ycos\,\theta}$$

Si hanno quindi le formule

$$\boxed{\begin{cases} x' = xcos\,\theta + ysin\,\theta \\ y' = -xsin\,\theta + ycos\,\theta \end{cases}}$$

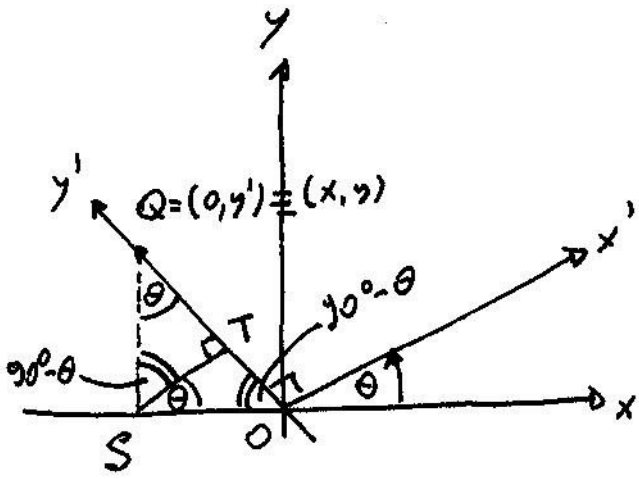


fig. 2

Oppure, da considerazioni geometriche sulla fig.2, con T piede della perpendicolare condotta dal punto S all'asse y', siha:

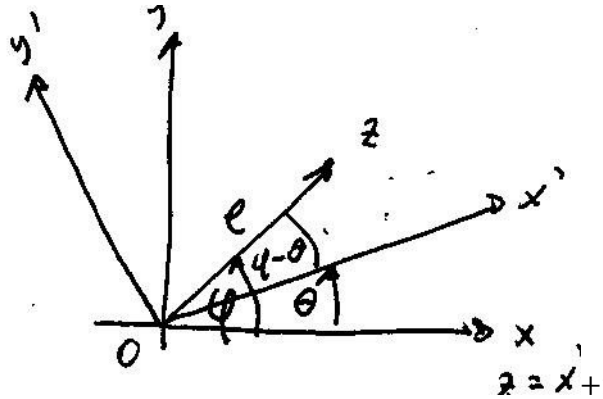
$$y' = \overline{QO} = \overline{QT} + \overline{TO} = \overline{QS}\cos\theta + \overline{OS}\sin\theta = ycos\ \theta - xsin\ \theta$$

Non è privo d'interesse notare come si possono dedurre le formule di rotazione utilizzando i numeri complessi.

<u>In forma trigonometrica</u>:

Siano le rappresentazioni del numero complesso z $\begin{cases} z = [\rho, \varphi]\ nel\ sistema\ xOy \\ z = [\rho, \varphi - \theta]\ nel\ sistema\ x'Oy' \end{cases}$

Dalle formule di trasformazione tra coordinate cartesiane e polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ segue



$$\boldsymbol{z = x' + iy' = [\rho, \varphi - \theta] = \rho[cos\ (\varphi - \theta) + isin\ (\varphi - \theta)] =}$$

$$\rho(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta + isin\varphi\cos\theta - icos\varphi\sin\theta) = (xcos\ \theta + ysin\ \theta) + i(ycos\ \theta - xsin\ \theta) \xrightarrow{yields}$$

$$\begin{cases} x' = xcos\ \theta + ysin\ \theta \\ y' = -xsin\ \theta + ycos\ \theta \end{cases}$$

In forma esponenziale:

$$z = x' + iy' = \rho e^{i(\varphi-\theta)} = \rho e^{i\varphi} e^{-i\theta} = \rho(\cos\varphi + isin\,\varphi)(\cos\theta - isin\,\theta) =$$

$$(\rho\cos\varphi\cos\theta + \rho\sin\varphi\sin\theta) + i(\rho\sin\varphi\cos\theta - \rho\cos\varphi\sin\theta)$$
$$= (xcos\,\theta + ysin\,\theta) + i(ycos\,\theta - xsin\,\theta)$$

da cui le formule $\begin{cases} x' = xcos\,\theta + ysin\,\theta \\ y' = -xsin\,\theta + ycos\,\theta \end{cases}$

In forma matriciale le formule si scrivono:

$\begin{cases} x' = xcos\,\theta + ysin\,\theta \\ y' = -xsin\,\theta + ycos\,\theta \end{cases} \xrightarrow{yields} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ che, posto $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ si scrive $X' = AX$. Poiché $\det A = cos^2\theta + sin^2\theta = 1 \neq 0$, la matrice A è invertibile con <u>inversa</u> A^{-1} tale che $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, essendo $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice identica ($\det A \neq 0$ è condizione necessaria e sufficiente affinché A sia invertibile).

Ricordiamo che la matrice <u>trasposta</u> di una matrice quadrata si ottiene scambiando tra loro le righe e le colonne per cui $A^T = [a_{ji}]$ se $A = [a_{ij}]$; inoltre per ogni i,j, sia M_{ij}il determinante della matrice quadrata di ordine $n-1$ ottenuto da $A = [a_{ij}]$; cancellando la i-ma riga e la j-ma colonna. M_{ij} è detto <u>minore</u> dell'elemento a_{ij} nel $\det \mathrm{A}$ e si definisce <u>cofattore</u> di a_{ij} lo scalare

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.Si dimostra che vale la formula seguente per ricavare la matrice inversa:

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}[A_{ij}]^{\,T}$, dove la matrice a secondo membro è la trasposta dei cofattori . Nel nostro caso $n = 2$ di matrice quadrata di due righe e due colonne, si ha

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{a_{11}} & \mathrm{a_{12}} \\ \mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{22}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{yields}} \begin{bmatrix} \mathrm{A_{11}} & \mathrm{A_{12}} \\ \mathrm{A_{21}} & \mathrm{A_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\mathrm{M_{11}} & (-1)^{1+2}\mathrm{M_{12}} \\ (-1)^{2+1}\mathrm{M_{21}} & (-1)^{2+2}\mathrm{M_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{M_{11}} & -\mathrm{M_{12}} \\ -\mathrm{M_{21}} & \mathrm{M_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_{22}} & -\mathrm{a_{21}} \\ -\mathrm{a_{12}} & \mathrm{a_{11}} \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{yields}} \begin{bmatrix} \mathrm{a_{22}} & -\mathrm{a_{21}} \\ -\mathrm{a_{12}} & \mathrm{a_{11}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_{22}} & -\mathrm{a_{12}} \\ -\mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{11}} \end{bmatrix} \xrightarrow{yields} A^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{a_{11}} & \mathrm{a_{12}} \\ \mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{22}} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \mathrm{a_{22}} & -\mathrm{a_{12}} \\ -\mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{11}} \end{bmatrix}$$ dove

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Nel nostro caso $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, quindi $X' = AX \xrightarrow{yields} A^{-1}X' = A^{-1}AX = IX = X \xrightarrow{yields}$

$$X = A^{-1}X' \xrightarrow{yields} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \xrightarrow{yields} \boxed{\begin{cases} x = \mathrm{x}'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}}$$

che sono le formule inverse