Un'introduzione ai numeri complessi

Prof. Giuseppe Caputo

Voglio cominciare questi appunti partendo dal campo dei numeri razionali $Q(+,\cdot)$. I suoi elementi, le frazioni $\frac{a}{b}$, $b \neq 0, a, b \in Z$ sono il rapporto tra le misure di grandezze commensurabili.

Il rapporto tra misure di grandezze non commensurabili quali la diagonale e il lato di un quadrato ($l^2 + l^2 = d^2 \xrightarrow{yields} 2l^2 = d^2 \xrightarrow{yields} \frac{d}{l} = \sqrt{2}$) o della lunghezza di una circonferenza di raggio r e il suo diametro ($\frac{2\pi r}{2r} = \pi$), ecc. impongono la necessità di un ampliamento algebrico di $Q\ (+,\cdot)$.

Il rapporto di grandezze incommensurabili sono appunto i numeri irrazionali definiti come elemento separatore di due classi separate e contigue di numeri razionali, la minorante sprovvista di massimo e la maggiorante di minimo. Ad esempio nel caso di $\sqrt{2}$, la classe minorante è $A = \{x \in Q^+ : x^2 \leq 2\}$e la classe maggiorante è $B = \{x \in Q^+ : x^2 \geq 2\}$mentre $\sqrt{2}$ è l'elemento separatore; le frazioni dell'insieme A approssimano per difetto quel numero il cui quadrato è 2, mentre le frazioni di B approssimano per eccesso tale numero che però non è una frazione e prende il nome di numero irrazionale.

Il nuovo campo ottenuto aggiungendo alle frazioni di $Q(+,\cdot)$ i numeri irrazionali prende il nome di campo reale e si indica con $R(+,\cdot)$. Ad esso si estendono formalmente le operazioni del campo razionale $Q(+,\cdot)$ (*) Si stabilisce quindi una relazione biunivoca tra i punti di una retta del piano e i numeri reali; tale retta costituisce un insieme continuo e ovunque denso di punti essendo sempre possibile trovare tra due numeri razionali almeno un numero irrazionale e almeno un numero razionale.

Il campo $R(+,\cdot)$ non consente di dare una soluzione tramite elementi del campo ad equazioni del tipo $x^2 + 1 = 0$;inoltre il polinomio $x^2 + 1$, non potendosi scomporre nel prodotto di polinomi di primo grado a coefficienti reali, risulta irriducibile nel campo reale.

Nasce dunque spontanea l'esigenza di ampliare il campo $R(+,\cdot)$ con un nuovo campo $C(+,\cdot)$, detto <u>campo complesso</u>, il quale possegga oltre ai numeri reali le soluzioni di tali equazioni algebriche irriducibili.

Cominciamo coli dire che come una soluzione in C dell'equazione $x^2 + 1 = 0$ poniamo quel numero $i \in C$ tale che $i^2 = -1$. Ciò permette di determinare le soluzioni in quanto $x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{yields} x^2 = -1 \xrightarrow{yields} x^2 = i^2 \xrightarrow{yields} x^2 - i^2 = 0 \xrightarrow{yields} (x - i)(x + i) = 0 \xrightarrow{yields} x = \pm i$. Poniamo allora $i = \sqrt{-1}$ di modo che $x^2 + 1 = 0 \xrightarrow{yields} x^2 = -1 \xrightarrow{yields} x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

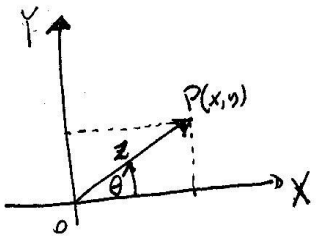
Ma quali sono gli elementi di $C(+,\cdot)$ e come si rappresentano? Sappiamo che i numeri reali s'identificano, mediante una corrispondenza uno a uno , cioè biunivoca, con i punti di una retta .

Il fatto notevole è che, per rappresentare i numeri complessi, dobbiamo aggiungere una dimensione e passare dalla retta al piano.

(*) Faremo ciò in modo ingenuo benché si tratta di un'estensione algebrica di campi. L'alunno interessato può chiedermi ragguagli.

In forma algebrica i numeri complessi z si definiscono come somma di una parte reale ed una immaginaria, ossia $z = Re(z) + i\, Im(z) = x + iy$, $x, y \in R$ dove x è la parte reale ed iy la parte immaginaria, prodotto dell'unità immaginaria i ed il numero reale y.

Poiché $z = \begin{cases} Re(z) = 0, \text{immaginario puro} \\ Im(z) = 0, \text{numero reale} \end{cases}$ un numero complesso può essere messo in corrispondenza biunivoca con la coppia ordinata $z = (x, y)$ di numeri reali individuante, mediante il vettore posizione $\overrightarrow{OP}$ un punto P del piano cartesiano, detto in questo caso piano di Gauss o piano complesso. Ha senso quindi



la scrittura $z = \overrightarrow{OP}$.

Poiché l'insieme C è l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate (x, y)di numeri reali, si può identificare C con il prodotto cartesiano $R^2 = R \times R$, quindi, poiché R^2 è in corrispondenza biunivoca con i punti del piano cartesiano, anche Cè in corrispondenza biunivoca con i punti di esso. Pertanto possiamo rappresentare i numeri complessi con i punti del piano di Gauss.

Quando si costruisce una nuova struttura algebrica tra le prime cose da fare è stabilire quando due elementi della struttura sono uguali; diremo che due numeri complessi z_1 e z_2 sono uguali se per definizione risulta $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$

Riassumendo, un numero complesso z ha una rappresentazione algebrica del tipo $z = x + iy$ equivalente a quella di rappresentare il numero complesso stesso come coppia ordinata $z = (x, y)$;

si possono definire in modo del tutto naturale le operazioni di somma e prodotto tra numeri complessi

come si fa con i numeri naturali.

<u>Addizione</u>: Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$sono due numeri complessi allora è univocamente determinato il numero complesso z_3 somma di z_1 e $z_2$da:

$z_3 = z_1 + z_2$=$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$,
oppure, nel simlolismo delle coppie ordinate, sommando le coordinate omologhe $z_3 = z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_3, y_3)$.

<u>Moltiplicazione</u>; Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ sono due numeri complessi allora è univocamente determinato il numero complesso z_3 prodotto di z_1 e $z_2$da:

$$z_3 = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + ix_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 =$$

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

oppure, nel simbolismo delle coppie ordinate

$$z_3 = z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

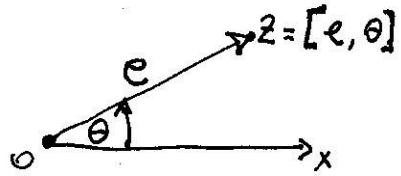
E' quindi naturale porre per definizione $x = x + 0i$, $iy = 0 + iy$, $0 = 0 + i0$, $i = 0 + i1$; si dice <u>complesso coniugato</u> del numero complesso $z = x + iy$ il numero complesso $\bar{z} = x - iy = x + i(-y)$, ottenuto cambiando il segno alla parte immaginaria. Talvolta (ad esempio in fisica) si indica il numero complesso coniugato con la scrittura z^*.

Si può verificare che tutte le proprietà del campo $R(+,\cdot)$ valgono per la struttura algebrica $C(+,\cdot)$ la quale quindi è un campo numerico, vi è però una differenza. Mentre R è un insieme totalmente ordinato rispetto alle usuali relazioni d'ordine stretto $<$ e largo $\leq$, potendosi confrontare tutti i numeri reali tra loro secondo le relazioni anzidette, nel campo complesso non è definita alcuna relazione d'ordine compatibile con le operazioni di somma e prodotto.

Il fatto che un numero complesso è individuato da un vettore, permette di applicare le operazioni con i vettori nel fare i calcoli con i numeri complessi. In questa breve esposizione, in vista di applicazioni alla fisica, privilegeremo l'aspetto trigonometrico ed esponenziale dei numeri complessi.

La rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi è la seguente.

Considerato nel piano un sistema di coordinate polari $[\rho, \theta]$, dove ρ è il <u>modulo</u> del numero complesso e θ l'<u>anomalia</u> o <u>argomento</u>, tale sistema si presenta con una semiretta x di origine il polo O detto <u>asse polare</u>



e un angolo θ orientato positivamente in senso antiorario.

Se l'anomalia θ varia nell'intervallo $[0,2\pi]$, allora ad ogni punto del piano diverso dal polo O corrisponde una ben determinata coppia di numeri reali (ρ, θ). In particolare per il polo O si assume $\rho = 0$ ed indeterminata l'anomalia θ. Noti viceversa i numeri ρ e θ, con $\rho > 0$, resta individuato un punto P che si determina tracciando prima la semiretta che forma l'angolo θ con l'asse polare x e poi prendendo su di essa il punto distante ρ dal polo O. Detto ciò si ha :

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow [\rho_1, \theta_1] = [\rho_2, \theta_2] \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in Z \end{cases}$. Da ciò si deduce che definiamo argomento del numero complesso z l'insieme degli angoli orientati $\arg z = \theta + 2k\pi\,, k \in Z$, di tutte le possibili determinazioni dell'anomalia θ di z.

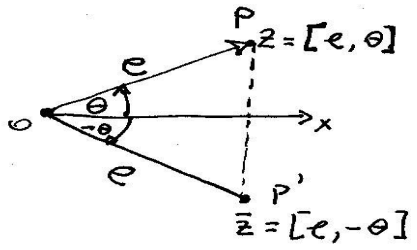
Definito allora come <u>argomento principale</u> di z l'angolo $Arg\ z \in (-\pi, \pi]$, si ricava l'espressione dell'argomento di z in funzione del suo argomento principale $\arg z = Arg\ z + 2k\pi\,, k \in Z$ ovvero la classe di congruenza $[Arg\ z]_{mod\ 2\pi} = \{\arg z : \arg z \equiv Arg\ z\ (mod\ 2\pi)\}$, dove per definizione $\arg z \equiv Arg\ z\ (mod\ 2\pi) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \arg z - Arg\ z = 2k\pi, k \in Z$, e ciò definisce l'argomento $\arg z$ a meno di multipli di 2π. L'origine O ha argomento indeterminato. E' importante notare che la rappresentazione polare non è biunivoca.

Considerato ora un sistema di assi cartesiani Oxy con centro nel polo O ed asse polare coincidente con l'asse x, si ricavano le relazioni tra coordinate cartesiane e polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ \rho = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$

$$\xrightarrow{yields} \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |z| \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases} \xrightarrow{yields} \arg z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, z \text{ è } lel\ 1° \ o\ 4° \ quadrante \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, z \text{ è } nel\ 2° \ quadrante \\ arctan\frac{y}{x} - \pi, z \text{ è } nel\ 3° \ quadrante \end{cases}$$

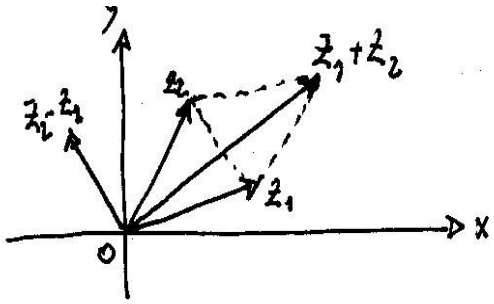
(vedi nota$^{(*)}$ pag.8)

Si osservi che il coniugato del numero complesso z è $\bar{\bar{z}} = x - iy$ in coordinate polari è individuato da $\bar{\bar{z}} = [\rho, -\theta]$che risulta l'affissa del punto P'simmetrico rispetto all'asse x del punto P la cui affissa è z.



Si può provare che il coniugato della somma, del prodotto e del quoziente di due numeri complessi è uguale alla somma, al prodotto e al quoziente dei coniugati di tali numeri. Valgono pure le relazioni $\begin{cases} \bar{\bar{z}} = z \\ z + \bar{z} = 2Re\ z \\ z - \bar{\bar{z}} = 2iIm\ z \end{cases}$

Da considerazioni geometriche si ricava che $\begin{cases} |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big| \end{cases}$



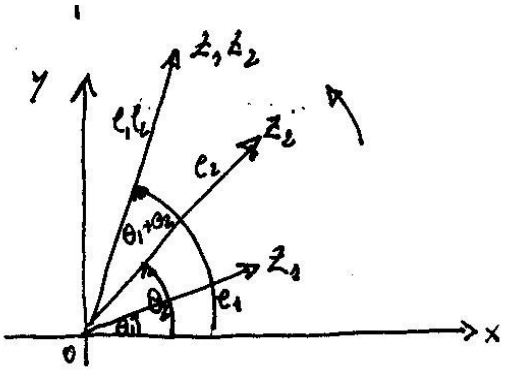
Si definisce il prodotto di due numeri complessi nel modo seguente:

1. <u>Definizione algebrica</u> $z_3 = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
2. <u>Definizione attraverso le coppie ordinate</u> $z_3 = z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$
3. <u>Definizione trigonometrica con le coordinate polari</u>
$$z_1 z_2 = [\rho_1, \theta_1][\rho_2, \theta_2] = (\rho_1\cos\theta_1 + i\rho_1\sin\theta_1)(\rho_2\cos\theta_2 + i\rho_2\sin\theta_2) =$$

$$\rho_1\rho_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + i\,\rho_1\rho_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 + i\rho_1\rho_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 + i^2\,\rho_1\rho_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 =$$
$$\rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + isin\,(\theta_1+\theta_2)] = [\rho_1\rho_2, \theta_1+\theta_2]$$

Così ad esempio i^2=$(0,1)(0,1) = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\left[0,\frac{\pi}{2}\right] = [0,\pi] = -1$ e

$z\bar{z} = [\rho,\theta][\rho,-\theta][\rho^2 0] = x^2 + y^2 = |z|^2 = \big||z|\big|$ norma del numero complesso z.



Si noti come il vettore prodotto z_1z_2 è dilatato o contratto e ruotato attorno all'origine; nel caso particolare che $|z| = 1$, c'è una rotazione pura (fattore di fase), mentre se si moltiplica il numero complesso z per un numero reale c'è una dilatazione o contrazione pura.

Dal prodotto di due o più numeri complessi si deduce l'operazione di elevazione a potenza ad esponente intero. Infatti si ottiene

$$z^n = \underset{n\ vote}{z\cdot\cdots\cdot z} = \underset{n\ volte}{[\rho,\theta]\cdot\cdots\cdot[\rho,\theta]} = \underset{n\ volte}{[\rho\cdot\cdots\cdot\rho, \theta+\cdots+\theta]} = [\rho^n, n\theta]$$

La relazione $\boxed{\boldsymbol{z^n = [\rho^n, n\theta] = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}}$ prende il nome di **<u>formula di De Moivre</u>**

Per ricavare la forma esponenziale di un numero complesso vi sono diversi procedimentl. Il più semplice è quello di ottenerla partendo dalla formula di De Moivre

$(\cos\theta + i\ sin\ \theta)^n = \cos n\theta + i\ sin\ n\theta$, per cui posto $\theta = \frac{x}{n}$, si ha:

$\left(\cos\frac{x}{n} + i\ sin\ \frac{x}{n}\right)^n = \cos x + i\ sin\ x.$

Poiché $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$=1, segue $\lim_{\frac{x}{n}\to 0}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = 1$, in quanto

$\frac{x}{n} \to 0 \xrightarrow{yields} n \to \infty$. Ora, ricordando il limite notevole $\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$, quindi applicando il teorema del limite di una funzione composta e notato che la quantità $\cos x + i\ sin\ x$ è indipendente da n, si ha

$\cos x + i\ sin\ x = \lim_{n\to\infty}(\cos x + i\ sin\ x) = \lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + i\ sin\ \frac{x}{n}\right)^n =$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n} + i\frac{x}{n}\frac{sin\ \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+i\ \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{ix}}\right)^{\frac{n}{ix}}\right)^{ix} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{ix} = e^{ix}$$

dove, ponendo $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{ix}} = t$, segue che $n \to \infty \xrightarrow{yields} t \to \infty$. Se ora facciamo la posizione $x = \theta$, essendo $|z| = \rho = 1$, si ha la <u>formula di Eulero – De Moivre</u> $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} = \boxed{[1, \theta]}$, donde nel caso $|z| = \rho \neq 1$ consegue in generale la <u>forma euleriana</u> o <u>esponenziale</u> di un numero complesso $\boxed{\boldsymbol{z = |z|e^{i\theta}}}$

A partire da questa si può ottenere la forma esponenziale del coniugato di un numero complesso; si ha:

$\bar{z} = \overline{\rho e^{\imath\theta}} = \overline{\rho(\cos\theta + \imath\sin\theta)} = \bar{\rho}\overline{(\cos\theta + \imath\sin\theta)} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta) = \rho[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = \rho e^{-i\theta}$, cioè $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$. Si ha pure

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - isin\,\theta}{2} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + isin(-\theta)}{2} = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$i\sin\theta = \frac{2i\sin\theta}{2} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta - \cos(-\theta) - i\,sin(-\theta)}{2} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta - [\cos(-\theta) + i\,sin(-\theta)]}{2} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \xrightarrow{yields}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Da cui le seguenti <u>**formule di Eulero**</u>. $\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \\ \boldsymbol{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}} \end{cases}}$

Usando la forma esponenziale di un numero complesso si ricavano subito:

<u>Prodotto di due numeri complessi:</u> $z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1}\rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

<u>Reciproco di un numero complesso:</u> $z^{-1} = \left(\rho e^{i\theta}\right)^{-1} = \rho^{-1}e^{-i\theta} = \frac{\rho\boldsymbol{e^{-i\theta}}}{\rho^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{\|z\|}$

<u>Rapporto di due numeri complessi:</u> $\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{z}_1\mathrm{z}_2^{-1} = \rho_1 e^{i\theta_1}\rho_2{}^{-1}e^{-i\theta_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2\right]$

Dimostriamo ora la proprietà che il coniugato della somma di due numeri complessi è uguale alla somma dei coniugati. Utilizziamo questa volta la simbologia che si usa in fisica ponendo al posto della barra superiore l'asterisco come apice.

Si ha;

$$
\begin{aligned}
(z_1+z_2)^* &= \left(\rho_1 e^{i\theta_1}+\rho_2 e^{i\theta_2}\right)^* = \left(\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\right)^* \\
&= \left((\rho_1\cos\theta_1+\rho_2\cos\theta_2)+i\,(\rho_1\sin\theta_1+\rho_2\sin\theta_2)\right)^* \\
&= (\rho_1\cos\theta_1+\rho_2\cos\theta_2)-i(\rho_1\sin\theta_1+\rho_2\sin\theta_2) \\
&= (\rho_1\cos\theta_1-i\,\rho_1\sin\theta_1)+(\rho_2\cos\theta_2-i\rho_2\sin\theta_2) \\
&= (\rho_1\cos(-\theta_1)+i\,\rho_1\sin(-\theta_1))+(\rho_2\cos(-\theta_2)+i\,\rho_2\sin(-\theta_2)) \\
&= \rho_1 e^{-i\theta_1}\rho_2 e^{-i\theta_2} = z_1^*+z_2^*
\end{aligned}
$$

Si definisce nel campo complesso la funzione esponenziale e^z, la quale non si annulla mai poiché $|e^z| = e^x \le e^{|x|} \le e^{\sqrt{x^2+y^2}} = e^{|z|}$. Essa è periodica di periodo $2\pi i$ in quanto $e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi) = e^z$.

Terminiamo questa introduzione ai numeri complessi con la radice di un numero complesso.

Si ha per definizione $\sqrt[n]{z} = w \overset{def}{\Longleftrightarrow} w^n = z \xrightarrow{yields} \begin{cases} |w|^n = |z| \xrightarrow{yields} |w| = |z|^{\frac{1}{n}} \\ n\arg w = \arg z \xrightarrow{yields} \arg w = \frac{\arg z}{n} \end{cases}$

Poiché $\arg z \equiv Arg\ z\ (mod\ 2\pi) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \arg z = Arg\ z + 2k\pi, k \in \{0,1,2,\cdots,n-1\}$, essendo n le classi di congruenza, esistono n valori distinti w_k di w che corrispondono allo stesso numero complesso z aventi tutti lo stesso modulo ma argomenti che differiscono di multipli di $\frac{2\pi}{n}$. Si hanno le due espressioni della radice n-ma di z in forma trigonometrica ed esponenziale seguenti:

$$
\begin{cases} \sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{[\rho,\theta]} = \left[\rho^{\frac{1}{n}}, \frac{\theta+2k\pi}{n}\right] = \left[|z|^{\frac{1}{n}}, \frac{Arg\ z+2k\pi}{n}\right] \\ \sqrt[n]{z} = w_k = \left(\rho e^{i\arg z}\right)^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\arg z}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\,Arg\ z+2k\pi}{n}} \end{cases} \quad \mathrm{k} = 0,1,\dots,\mathrm{n}-1
$$

Vale quindi la formula

$$
\boxed{\boldsymbol{\sqrt[n]{z} = \left[|z|^{\frac{1}{n}}, \frac{Arg\ z+2k\pi}{n}\right] = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\,Arg\ z+2k\pi}{n}}}} \quad \mathrm{k} = 0,1,\dots,\mathrm{n}-1
$$

Geometricamente gli n numeri complessi w_k corrispondono ai vertici (o anche ai raggi vettori) di un poligono regolare inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $|z|^{\frac{1}{n}}$

E' interessante notare che essendo $z_1\bar{z}_2 = (x_1+iy_1)(x_2-iy_2) = (x_1x_2+y_1y_2)+i(x_21-x_1y_2) = Re\ (z_1\bar{z}_2)+i\ Im(z_1\bar{z}_2)$, si ricava l'espressione del prodotto scalare dei vettori $\overrightarrow{z_1}$ e $\overrightarrow{z_2}$, avendosi $\overrightarrow{z_1}\cdot\overrightarrow{z_2} = Re\ (z_1\bar{z}_2) = Re(\bar{z}_1 z_2)$; d'altra parte, posto il modulo del prodotto vettoriale uguale a $|\overrightarrow{z_1}\times\overrightarrow{z_2}| = Im(z_1\bar{z}_2)$, si ricava che

$\overrightarrow{z_1} \times \overrightarrow{z_2} = 0 \xrightarrow{yields} Im(z_1\bar{z}_2) = 0 \xrightarrow{yields} x_2y_1 - x_1y_2 = 0 \xrightarrow{yields} \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \xrightarrow{yields} z_2 = \gamma z_1, \gamma \in$
$\xrightarrow{yields} \overrightarrow{z_2} = \gamma\overrightarrow{z_1} \xrightarrow{yields} \overrightarrow{z_1}\ parallelo\ a\ \overrightarrow{z_2}.$

Nota $^{(*)}$: Per poter invertire $\tan\theta = \frac{y}{x}$ occorre considerare la restrizione della tangente all'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ che è ivi strettamente crescente; la sua funzione inversa è $\text{atan}: x \in R \to y = \text{atan}\, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Si hanno i seguenti casi:

1. z è l'affissa di un punto del 1° oppure 4°quadrante per cui $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ è un angolo orientato positivamente del 1° quadrante oppure orientato negativamente del 4°quadrante. Allora si ha $\tan\theta = \frac{y}{x} \xrightarrow{yields} \theta = \text{atan}\frac{y}{x}$.
2. z è l'affissa di un punto del 2°quadrante per cui $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ è un angolo orientato positivamente del 2° quadrante. Ciò implica che $\theta - \pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ è un angolo orientato negativamente del 4°quadrante, da cui, osservato che $\tan(\theta - \pi) = \tan[-(\pi - \theta)] = -\tan(\pi - \theta) = \tan\theta$, deve essere $\tan\theta = \frac{y}{x} \xrightarrow{yields} \tan(\theta - \pi) = \frac{y}{x} \xrightarrow{yields} \theta - \pi = \text{atan}\frac{y}{x} \xrightarrow{yields} \theta = \text{atan}\frac{y}{x} + \pi$
3. z è l'affissa di un punto del 3°quadrante per cui $\theta \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ è un angolo orientato positivamente del 3°quadrante. Allora $\theta + \pi \in \left[2\pi, \frac{5}{2}\pi\right) \xrightarrow{yields} \theta + \pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ è un angolo orientato positivamente del 1°quadrante, da cui, osservato che $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$, si ha che $\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\xrightarrow{yields} \tan(\pi + \theta) = \frac{y}{x} \xrightarrow{yields} \pi + \theta = \text{atan}\frac{y}{x} \xrightarrow{yields} \theta = \text{atan}\frac{y}{x} - \pi.$

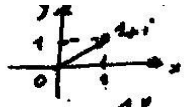
ESERCIZI SVOLTI

Calcolare:

1. $(1+i)(4+3i) = 4+3i+4i+i^2 = 3+7i$
2. $(3+2i)(3-2i) = 9-4i^2 = 13$
3. $(1+i)(4+i) = 4+i+4i+i^2 = 3+5i$
4. $(1-i)(4+i) = 4+i-4i-i^2 = 5-3i$
5. $Re\,(1-i)Re\,(3+7i) = 1\cdot 3 = 3$
6. $Re\,(1-i)Im(3+7i) = 1\cdot 7 = 7$
7. $|2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
8. $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$
9. $(2+3i)^3 = 8+3\cdot 4\cdot 3i+3\cdot 2\cdot 9i^2+27i^3 = -46+9i$
10. $\frac{(1+\mathrm{i})(4+\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})} = \frac{3+5i}{7+4i} = \frac{(3+5i)(7-4i)}{(7+4i)(7-4i)} = \frac{41}{65}+\frac{23}{65}i$

Scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:

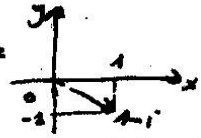
1) $\boxed{1+i}$, $\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow$



$\theta = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ 1. kvadrant

$1+i = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}] = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

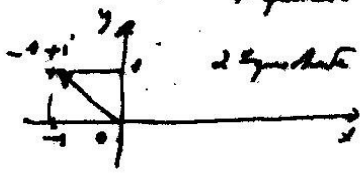
2) $\boxed{1-i}$, $\rho = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta = -1 \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$



4. kvadrant

$1-i = [\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}] = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

3) $\boxed{-1+i}$, $\rho = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta = -1$



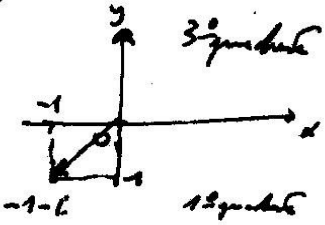
2. kvadrant

$\Downarrow$

$\theta = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$

$-1+i = [\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi] = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$

4) $\boxed{-1-i}$, $\rho = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta = 1 \Rightarrow$



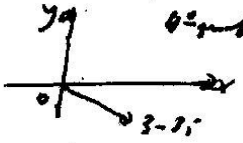
$\Rightarrow \theta = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$

$-1-i = [\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi] = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3}{4}\pi}$

5) $\boxed{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$, $\rho = \sqrt{2+2} = 2$, $\operatorname{tg}\theta = 1 \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}\frac{\pi}{4} = 1$

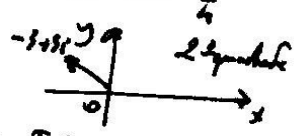
$\sqrt{2} + i\sqrt{2} = [2, \frac{\pi}{4}] = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

6) $\boxed{3-3i}$, $\rho = 3\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta = -1 \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$



$3-3i = [3\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}] = 3\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

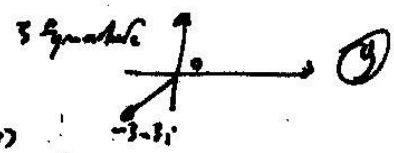
7) $\boxed{-3+3i}$, $\rho = 3\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta = -1 \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$



2. kvadrant

$-3+3i = [3\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi] = 3\sqrt{2}\, e^{i\frac{3}{4}\pi}$

8) $\boxed{-3-3i}$ $\rho = 3\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\theta = 1 \Rightarrow$



$\theta = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4}\pi$

$-3-3i = [3\sqrt{2}, -\frac{3}{4}\pi] = 3\sqrt{2}\, e^{-i\frac{3}{4}\pi}$

Calcolare con la formula di De Moivre le seguenti potenze di numeri complessi:

1) $\boxed{(1+i)^{32}}$ $\quad \rho = \sqrt{2}\ ,\ tg\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$

$$(1+i)^{32} = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]^{32} = \left[\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{32}, 32\frac{\pi}{4}\right] = \left[2^{16}, 8\pi\right] =$$

$$= 2^{16}(\cos 8\pi + i \operatorname{sen} 8\pi) = 2^{16}$$

2) $\boxed{(\sqrt{3} - i)^{206}}$ $\quad \rho = 2\ ,\ tg\,\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$$(\sqrt{3}-i)^{206} = \left[2, -\frac{\pi}{6}\right]^{206} = \left[2^{206}, -\frac{206}{6}\pi\right] = \left[2^{206}, \frac{-103}{3}\pi\right] =$$

$$= \left[2^{206}, -\frac{103}{3}\pi + 34\pi\right] = \left[2^{206}, -\frac{\pi}{3}\right] = 2^{206}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^{206}(1 - i\sqrt{3}).$$

3) $(-\sqrt{3} - i)^{215} = -(\sqrt{3} + i)^{215} = -2^{214}(\sqrt{3} - i)$

5) $(2-3i)^4 = 2^4 - \binom{4}{1} 2^3 \cdot 3i + \binom{4}{2} 2^2 (3i)^2 - \binom{4}{3} 2 \cdot (3i)^3 + (3i)^4 =$

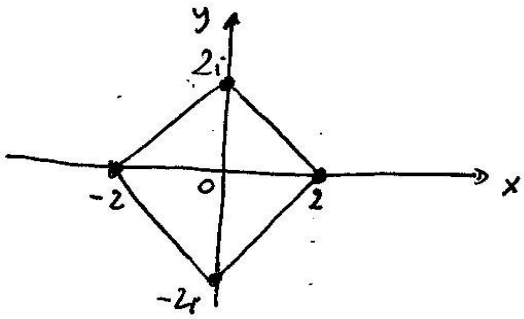
$$= -119 + 120i$$

Calcolare le seguenti radici di numeri complessi:

$$\boxed{\sqrt[4]{16}} \qquad tg\,\theta = \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \theta = arctg\,0 =$$

$$\sqrt[4]{16} = \left[16^{\frac{1}{4}}, \frac{0+2k\pi}{4}\right] = \left[2, \frac{k\pi}{2}\right]_{k=0,1,2,3} =$$

$$= \begin{cases} k=0, & [2,0] = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2(1+i\cdot 0) = 2 \\ k=1, & \left[2, \frac{\pi}{2}\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i \\ k=2, & [2,\pi] = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2 \\ k=3, & \left[2, \frac{3}{2}\pi\right] = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -2i \end{cases}$$



L'alunno calcoli le seguenti radici di numeri complessi:

$\sqrt{1+i\sqrt{3}}$,

$\sqrt{1-i\sqrt{3}}$,

$\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$,

$\sqrt[4]{2+2i\sqrt{3}}$,

$\sqrt[8]{-\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$,

$\sqrt{i}, \sqrt[3]{i}, \sqrt[4]{-2}, \sqrt[4]{-4}$

Calcolare e verificare che $\frac{3+i+\sqrt[4]{-4}}{2} = \{1,2,1+i,2+i\}$