Liceo Vico – Napoli a.s. 2013-14

Osservazioni analitiche e sperimentali su esperienze di meccanica in laboratorio

Prof. Sandro Carta e prof. Giuseppe Caputo

Calcolo dell'accelerazione di gravità

Premessa:

L'esperienza illustrata di seguito aveva come scopo quello di calcolare l'accelerazione di gravità ed è stata realizzata misurando con un cronometro elettronico il tempo di caduta di una sfera di acciaio e l'altezza del salto. Tuttavia i valori ottenuti si discostavano dai valori conosciuti di **g**, risultando sempre significativamente sottostimati.

Inoltre abbiamo verificato che riducendo l'altezza di caduta i valori calcolati di g si discostavano sempre più dal valore atteso. Tale risultato non poteva essere attribuito ad un errore sulla misura delle altezze, eseguita con una precisione stimabile in 1 mm/1m cioè dello 0.001. Doveva quindi discendere da errori sulla misura dei tempi.

Abbiamo quindi provato a ripetere l'esperienza con varie altezze. I risultati sono riportati in tabella.

Il tempo atteso è stato calcolato considerando un'accelerazione di 9,81 m/s^2 rispetto all'altezza misurata

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

h in m	Δt misurato in s	g calcolato m/s^2	Δt atteso in s	Differenza tra i tempi in s
0,904	0,461	8,51	0,429	0,032
0,838	0,444	8,50	0,413	0,031
0,787	0,431	8,47	0,401	0,030
0,732	0,418	8,38	0,386	0,032
0,687	0,406	8,34	0,374	0,032
0,643	0,392	8,37	0,362	0,030
0,586	0,377	8,25	0,346	0,031
0,524	0,357	8,22	0,327	0,030
0,478	0,343	8,13	0,312	0,031
0,437	0,328	8,12	0,298	0,030
0,376	0,309	7,88	0,277	0,032
0,330	0,289	7,90	0,259	0,030
0,282	0,270	7,74	0,240	0,030
0,226	0,244	7,59	0,215	0,029
0,202	0,235	7,32	0,203	0,032
0,155	0,209	7,10	0,178	0,031
0,133	0,196	6,92	0,165	0,031
0,100	0,175	6,53	0,143	0,032
0,078	0,156	6,41	0,126	0,030
0,064	0,146	6,00	0,114	0,032
0,040	0,119	5,65	0,090	0,029
0,033	0,110	5,45	0,082	0,028
0,028	0,105	5,08	0,076	0,029

Come si vede i tempi risultano sempre superiori di un valore compreso tra 0,28 e 0,32 s, con un valore medio di 0,0306s e una deviazione standard di 0,001s. Ciò è probabilmente dovuto all'inerzia del dispositivo elettromeccanico, che tarda il rilascio della sfera di acciaio rispetto all'istante di start.

Abbiamo concluso che la misura sia affetta da un **errore sistematico di 0,030s ± 0,001**.

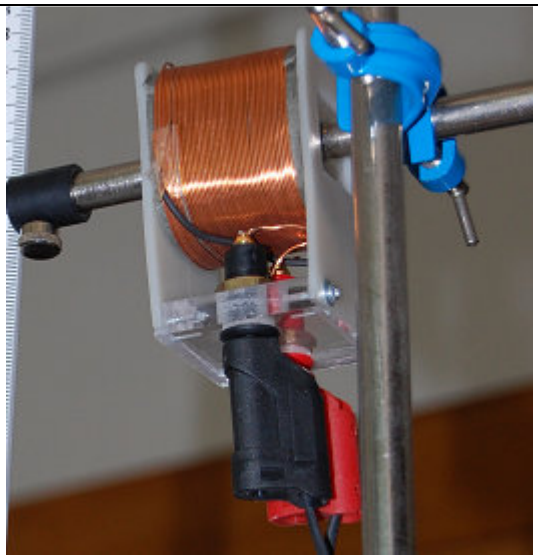
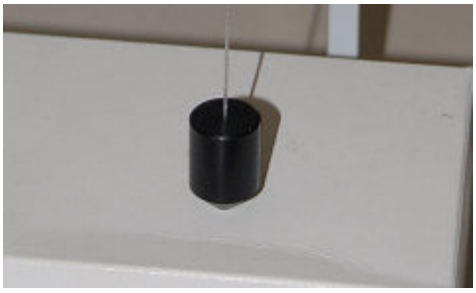
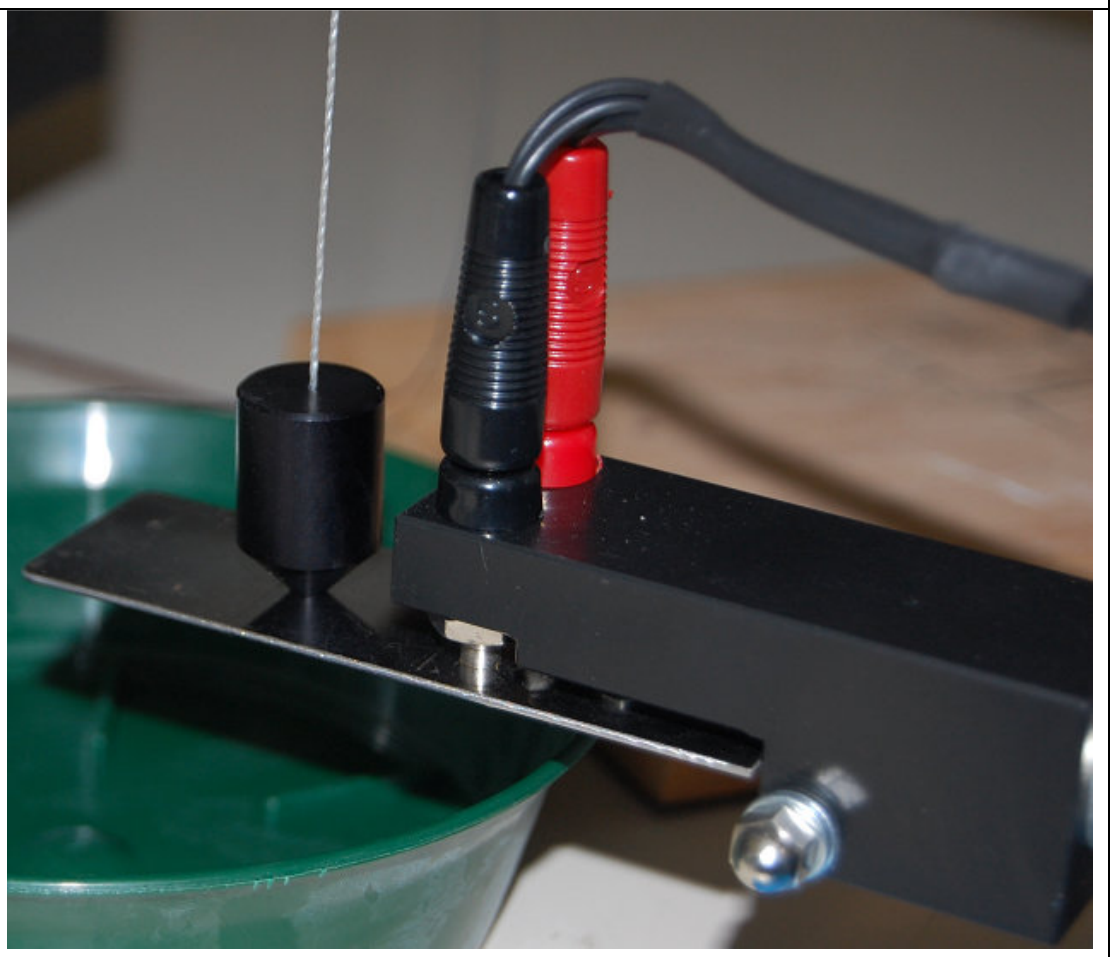
Nel seguito abbiamo utilizzato tale valore per correggere i risultati.

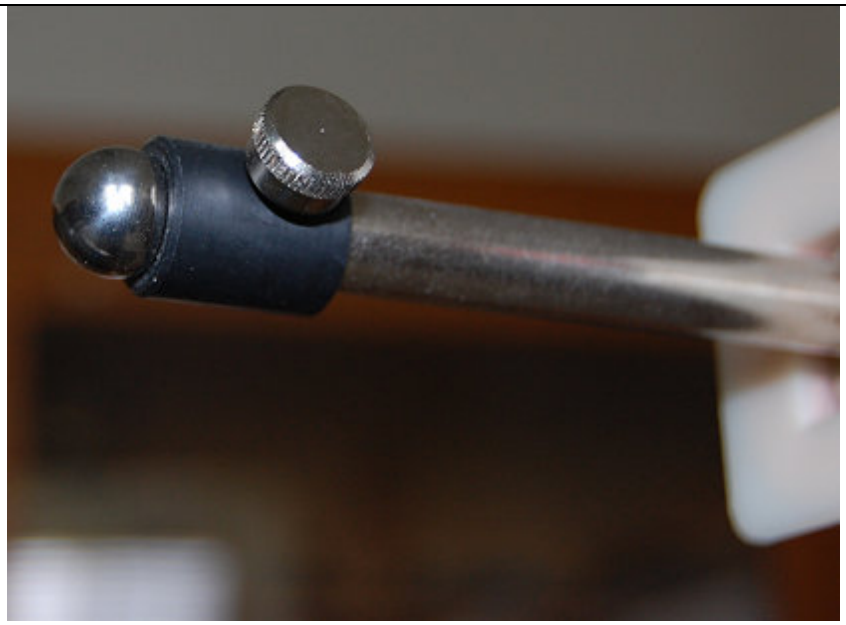
È opportuno sottolineare che l'esperienza è molto delicata. Un errore nella misura dei tempi di 0.001 s, corrispondente alla sensibilità dello strumento, comporta un errore sull'accelerazione di gravità di circa 0.05 m/s^2

Montaggio dell'apparecchiatura e realizzazione dell'esperienza.

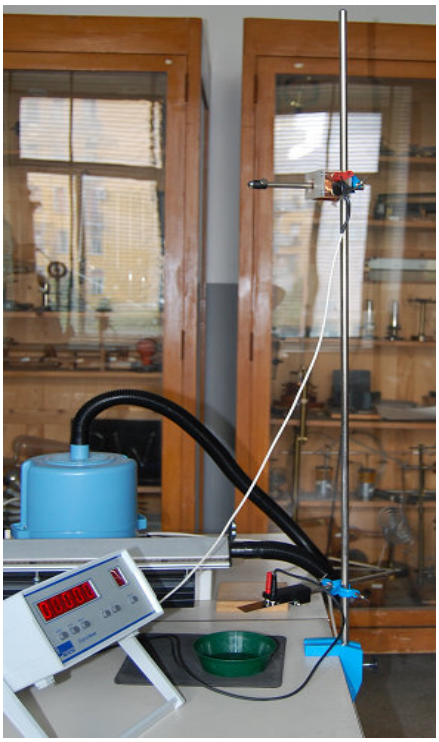
Le attrezzature necessarie sono di seguito illustrate:

Timer digitale.	
Distanziatore	

Dispositivo elettromagnetico di start. Il distanziatore è montato.	
Filo a piombo	
Traguardo mobile. Il filo a piombo verifica la posizione del traguardo in corrispondenza a quella della sfera di acciaio	

La sfera di acciaio è attratta dal dispositivo di start ma non direttamente a contatto.	

I dispositivi di start e il traguardo mobile vanno collegati con i cavi a cui sono connessi alle porte retrostanti il timer.
Perché la sfera resti ancorata al dispositivo di lancio occorre che il timer sia acceso e resettato. Il contasecondi indicherà 0.000 s.
In definitiva l'apparato risulta il seguente.
Acceso il conta tempi, posizioniamo una delle due sferette di acciaio a contatto con



l'elettromagnete, quindi premiamo il tasto Start. Si può così conoscere il tempo □t impiegato dalla sferetta a percorrere il tratto di caduta h.

L'accelerazione viene calcolata dalla relazione $g = \frac{2 \cdot h}{\Delta^2 t}$

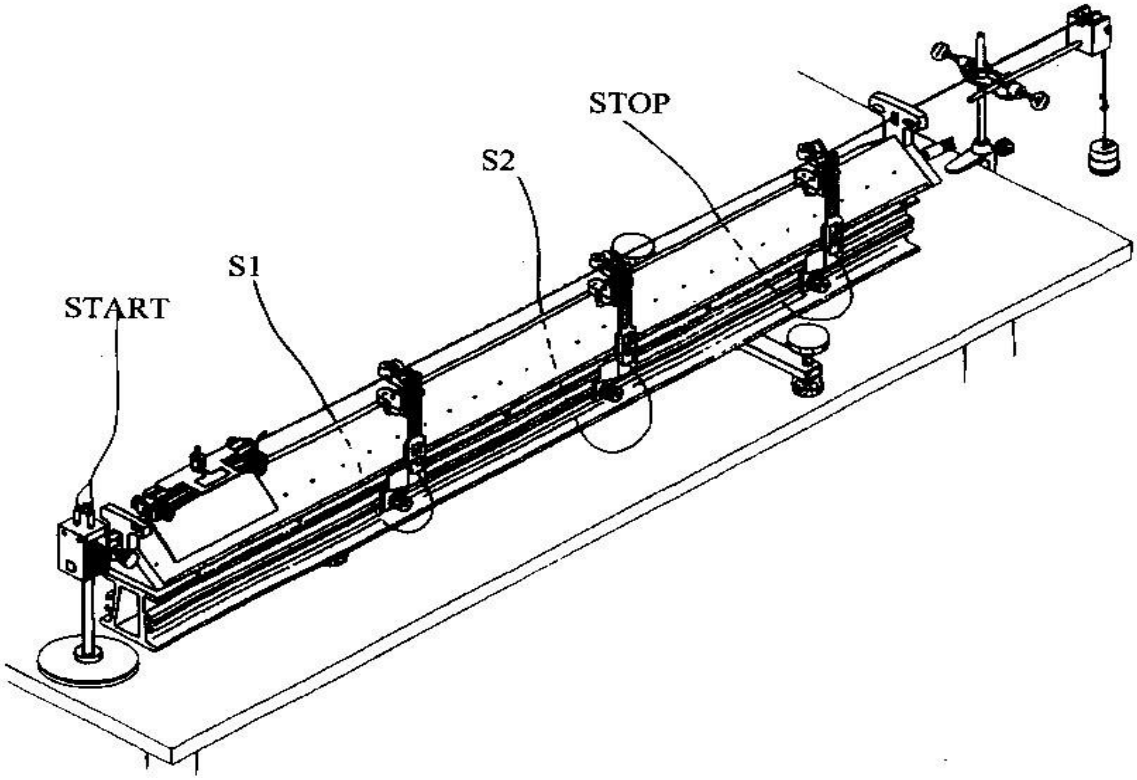
La prova viene ripetuta più volte variando sia la sfera che l'altezza. Vengono di seguito riportati i dati ottenuti. Nella terza colonna il tempo è stato corretto con il valore precedentemente indicato.

h in m	Δt misurato in s	Δt corretto in s	g in m/s^2
0,9	0,461	0,431	9,76
0,838	0,444	0,414	9,80
0,787	0,431	0,401	9,81
0,732	0,418	0,388	9,75
0,687	0,406	0,376	9,74
0,643	0,392	0,362	9,84
0,586	0,377	0,347	9,76
0,524	0,357	0,327	9,83
0,478	0,343	0,313	9,79
0,437	0,328	0,298	9,88
0,376	0,309	0,279	9,70
0,330	0,289	0,259	9,88
0,282	0,270	0,240	9,83
0,227	0,244	0,214	9,96
0,202	0,235	0,205	9,66
0,155	0,209	0,179	9,73
0,133	0,196	0,166	9,71
0,100	0,175	0,145	9,58
0,078	0,156	0,126	9,90
0,064	0,146	0,116	9,60
0,039	0,119	0,089	9,96
0,031	0,110	0,080	9,81

Il valore medio dell'accelerazione è 9,79 m/s^2 .in buon accordo con il valore atteso

Determinazione dell'accelerazione di gravità con la rotaia a cuscino di aria

Si è allestita la rotaia a cuscino d'aria di 200 cm nel modo indicato in figura, posizionando le distanze dei traguardi e la lamina di oscuramento del carrello in modo che $s_1 = 0{,}30\ m$, $s_2 = 0.60\ m$, $s_3 = 0.90\ m$
Va fatto presente che tali distanze vanno misurate dal bordo anteriore della piccola lamina al centro di ogni sensore.



Premuto il tasto Start sul fronte anteriore del timer, alla fine della corsa del carrello, agendo sul tasto Select per selezionare le posizioni 1, 2 e 3, si è preso nota dei tempi t_1, t_2, t_3 intercorsi dalla partenza al raggiungimento dei tre traguardi; ripetendo tale procedimento in cinque prove successive. I risultati sono riportati di seguito nella tabella

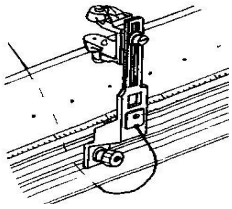
$s_1 = 0{,}30\ m$	t_1 =0.93 s	t_1 =0.93 s	$t_1 = 0.92\ s$	t_1 =0.92 s	t_1 =0.93 s
$s_2 = 0.60\ m$	$t_2 = 1.29\ s$	$t_2 = 1.29\ s$	t_2 =1.29 s	t_2 =1.29 s	t_2 =1.30 s
$s_3 = 0.90\ m$	t_3 =1.57 s	t_3 =1.57 s	t_3 =1.56 s	t_3 =1.57 s	t_3 =1.59 s

Considerati i tempi medi, si ha

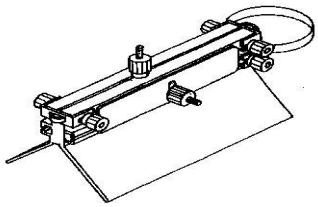
$s_1 = 0{,}30\ m$	t_1 =0.93 s	${s_1}/{t_1^2} = 0.35\ {m}/{s^2}$	Valore medio ${s}/{t^2}$= 0.36 ${m}/{s^2}$
$= s_2 = 0.60\ m$	$t_2 = 1.29\ s$	${s_2}/{t_2^2} = 0.36\ {m}/{s^2}$	$= \frac{1}{2}a$
$s_3 = 0.90\ m$	t_3 =1.57 s	${s_3}/{t_3^2} = 0.37\ {m}/{s^2}$	$\boxed{a = 0.72\ {m}/{s^2}}$

Quindi, nei limiti degli errori sperimentali, il rapporto $\frac{2s}{t^2}$ assume approssimativamente il valore costante $a = 0.72\ {}^{m}/_{s^2}$ che, non rappresenta l'accelerazione di gravità a causa dell'inerzia del carrellino mobile e dell'attrito che questo ha con lo strato d'aria che lo sostiene.

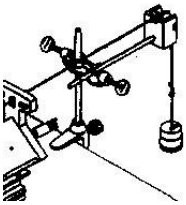
Allo scopo di determinare il fattore per convertire l'accelerazione trovata in quella di gravità, dobbiamo fare un'analisi delle forze agenti sul sistema meccanico costituito dal carrellino e dal peso che, solidale ad esso tramite un filo sottile di cotone (che consideriamo inestensibile e di massa trascurabile) passante nella gola di una carrucola fissa di massa trascurabile (e quindi priva d'inerzia), nella caduta verso il basso ne causa il moto lungo la rotaia.



traguardo



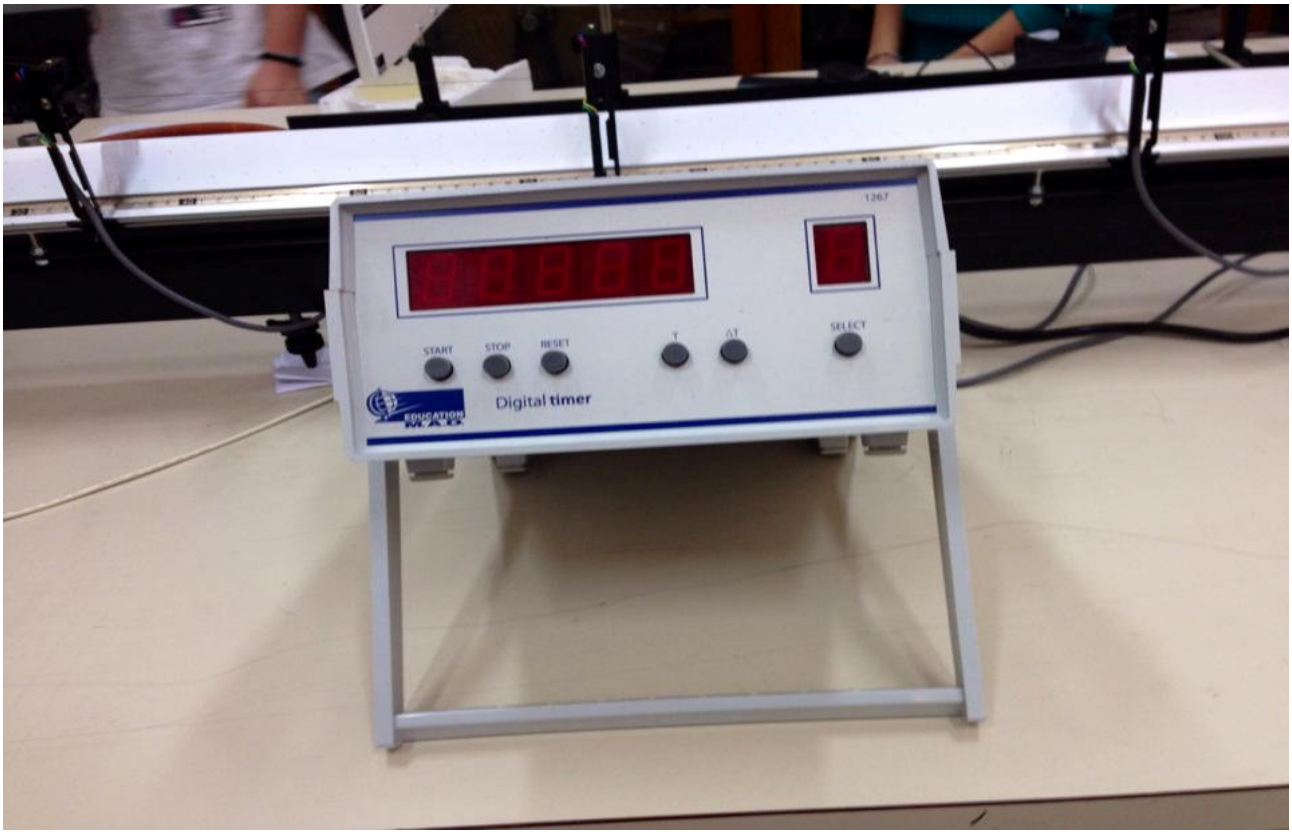
Carrello di massa m_1



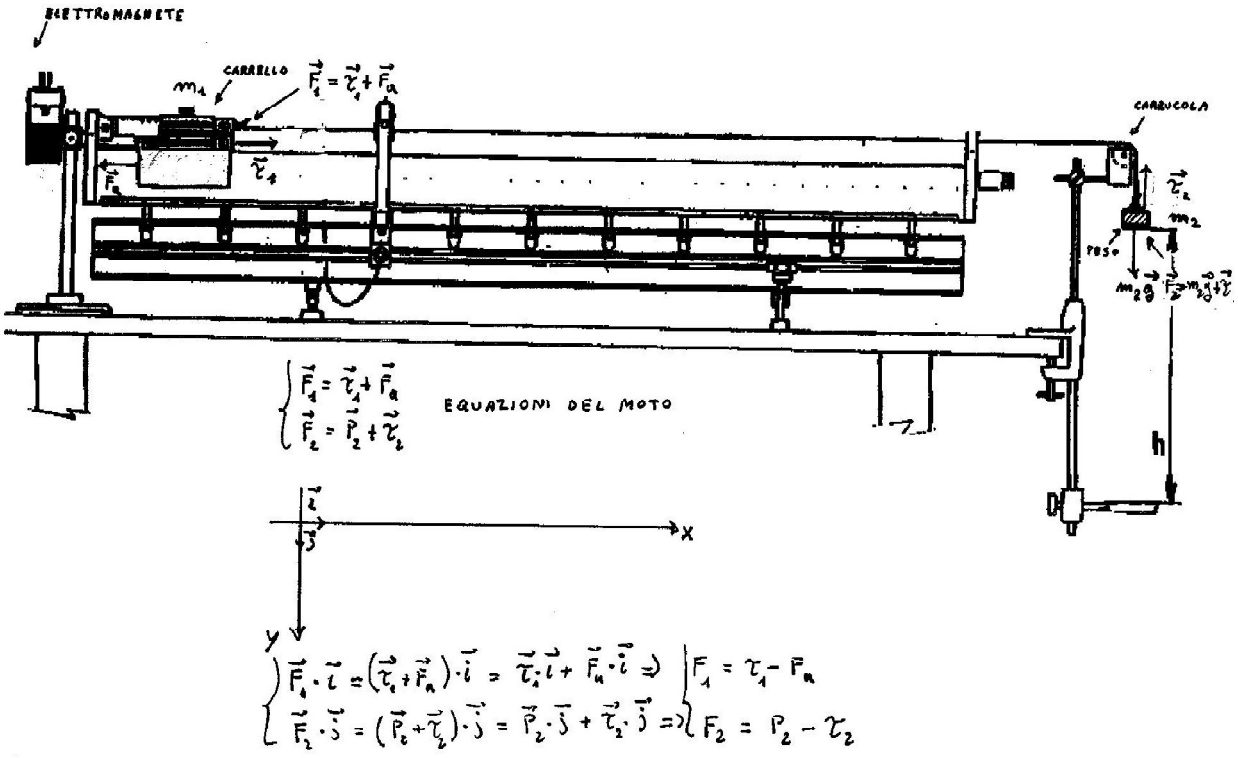
Peso di massa m_2. Dalle misure effettuate con un dinamometro risulta che la massa del carrello è $m_1 = \frac{P_1}{g} = \frac{1.2\ N}{9.8\ {}^{m}/_{s^2}} \approx 0.1224$ kg,mentre la misura del peso è $m_2 = \frac{P_2}{g} = \frac{0.12\ N}{9.8{}^{m}/_{s^2}} \approx 0.0122$kg

Trascurando l'attrito dell' aria sul peso durante la caduta nel tratto h, quindi supponendo che il carrello abbia un attrito dinamico con il cuscino d'aria che lo sostiene durante il moto lungo la rotaia, indichiamo con $F_a = \mu_D m_1 g$ la forza di attrito, dove μ_D è il coefficiente d'attrito dinamico , m_1 la massa del carrello e g l'accelerazione di gravità, osservando che tale forza ha la direzione del moto ma verso contrario.

MГAMГ


1267
START
STOP
RESET
T
ΔT
SELECT
EDUCATION
Digital timer

Introduciamo un sistema di assi cartesiani 0xy orientati come in figura e siano $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ rispettivamente i versori di essi.



Indicate con $\overrightarrow{F_1}$e $\overrightarrow{F_2}$ rispettivamente le risultanti delle forze agenti sul carrello e sul peso, si hanno le equazioni del moto in forma vettoriale

$$\begin{cases}\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{\tau_1} + \overrightarrow{F_a} \\ \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{P_2} + \overrightarrow{\tau_2}\end{cases}$$

Essendo la fune inestensibile, la distanza tra carrello e peso rimane costante; ciò comporta che le accelerazioni $\overrightarrow{a_1}$ e $\overrightarrow{a_2}$ dei corpi devono avere uguale modulo e versi concordi rispettivamente con l'asse x e y, per cui $|\overrightarrow{a_1}| = |\overrightarrow{a_2}| = a_1 = a_2 = a$.

Da un'analisi delle reazioni vincolari $\overrightarrow{\tau_1}$ e $\overrightarrow{\tau_2}$ esercitate dalla fune sul carrello e sul peso, si evince, poiché supponiamo che la carrucola abbia massa trascurabile (e quindi inerzia trascurabile), che le due forze devono avere uguale modulo $|\overrightarrow{\tau_1}| = |\overrightarrow{\tau_2}| = \tau$, la prima verso concorde con l'asse x, la seconda verso opposto a quello dell'asse y. Considerando le proiezioni dell'equazioni del moto rispetto all'asse x e y, si ha:

$$\begin{cases}\overrightarrow{F_1}\cdot\vec{\imath} = \overrightarrow{\tau_1}\cdot\vec{\imath} + \overrightarrow{F_a}\cdot\vec{\imath} \\ \overrightarrow{F_2}\cdot\vec{\jmath} = \overrightarrow{P_2}\cdot\vec{\jmath} + \overrightarrow{\tau_2}\cdot\vec{\jmath}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_1\cos 0 = \tau\cos 0 + F_a\cos 180° \\ F_2\cos 0 = P_2\cos 0 + \tau_2\cos 180°\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_1 = \tau - F_a \\ F_2 = P_2 - \tau\end{cases}$$

Che sono le equazioni del moto in forma scalare.

Si ha:

$$\begin{cases}F_1 = \tau - \mu_D m_1 g \\ F_2 = m_2 g - \tau\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m_1 a = \tau - \mu_D m_1 g \\ m_2 a = m_2 g - \tau\end{cases}.$$

Da tali equazioni si ricava che la forza risultante esercitata sul carrello e sul peso è

$$F = ma = F_1 + F_2 = (m_1 + m_2)a = \tau - \mu_D m_1 g + m_2 g - \tau = m_2 g - \mu_D m_1 g\ ,$$

da cui si ricava l'accelerazione incognita

$$\boxed{a = \frac{m_2 - \mu_D m_1}{m_1 + m_2}\ g},$$

donde

$$\boxed{g = \frac{m_1 + m_2}{m_2 - \mu_D m_1}\ a},$$

dove $\frac{g}{a} = \frac{m_1 + m_2}{m_2 - \mu_D m_1}$ è il fattore di conversione cercato.

Supponendo che l'accelerazione di gravità sia $g = 9.8\ {}^{m}/_{s^2}$ (come si è già calcolato) il coefficiente di attrito dinamico è

$$\mu_D = \frac{\mathrm{m_2 g}-(m_1+m_2)a}{m_1 g} = \frac{0.122\ kg\times 9.8\ {}^{m}/_{s^2} - 0.1346\ kg\times 0.72 {}^{m}/_{s^2}}{0.1224\ kg\times 9.8 {}^{m}/_{s^2}} \approx 0.019$$

Naturalmente sostituendo, si ritrova allora $g = \frac{0.1224\ \mathrm{kg}+0.0122\ \mathrm{kg}}{0.0122\ \mathrm{kg}-0.019\times 0.1224\ \mathrm{kg}} \times 0.72 \approx 9.8145\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$, per cui il moto equivale a quello di un corpo che si muove con moto uniformemente accelerato su una superficie scabra orizzontale avente attrito dinamico uguale a $\mu_D = 0.019$.

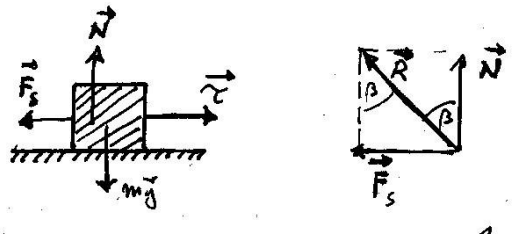
Possiamo calcolarci la tensione τ esercitata sul filo sostituendo l'espressione dell'accelerazione a trovata in una delle due equazioni del moto. Sostituendo ad esempio nelle seconda equazione del moto si ha

$$m_2 a = m_2 g - \tau \Rightarrow \tau = m_2 g - m_2 a = m_2 g - m_2 \frac{m_2-\mu_D m_1}{m_1+m_2} g = m_2 g \left(1 - \frac{m_2-\mu_D m_1}{m_1+m_2}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{m_1 m_2}}{\mathrm{m_1+m_2}}(1+\mu_\mathrm{D})g \Rightarrow \quad \boxed{\tau = \frac{\mathrm{m_1 m_2}}{\mathrm{m_1+m_2}}(1+\mu_\mathrm{D})g} \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{0.1224\ \mathrm{kg} \times 0.0122\ \mathrm{kg}}{0.1346\ kg}(1+0.019) \times 9.8\ {}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2} \approx 0.11\ N$$

A proposito degli attriti relativi al moto di un corpo di massa m su una superficie piana scabra, supponendo che sul corpo si eserciti, diretta verticalmente verso il basso, normale al piano del moto, la sola forza peso



$m\vec{g}$, bisogna osservare quanto segue.

Detta $\vec{F_s}$ la forza di attrito statico che si oppone al moto, $\vec{N} = -m\vec{g}$ la reazione vincolare del piano, $\vec{R} = \vec{F_s} + \vec{N}$ la risultante tra la forza di attrito e la reazione vincolare, $\vec{\tau}$ l'equilibrante della forza $\vec{R}$ e del peso $m\vec{g}$ di modo che $\vec{R} + m\vec{g} +, \vec{\tau} = 0$, il corpo rimane in quiete fino a quando la forza di attrito non bilancia la forza poiché

$$\vec{R} + m\vec{g} +, \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{F_s} + \vec{\mathrm{N}} + m\vec{g} + \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{F_s} - m\vec{g} + m\vec{g} + \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{F_s} = -\vec{\tau}.$$

Scritta la relazione precedente in forma scalare

$$F_s = -\tau,$$

il corpo resta in quiete fino a quando non si supera il valore τ^{max}, cioè fino a quando il corpo non è sottoposto a una forza maggiore di quella forza di attrito statico massima che la superficie scabra può esercitare $F_s^{max} = -\tau^{max}$..Osservato che

$|\vec{N}| = N = mg$, si verifica sperimentalmente che la forza di attrito massima F_s^{max} è direttamente proporzionale a N, cioè al peso mg del corpo , per cui vale la relazione

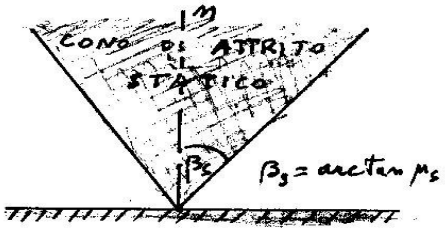
$F_s^{max} = \mu_s N (= \mu_s mg$ se il piano d'appoggio è orizzontale), dove il coefficiente numerico μ_s è detto *coefficiente di attrito statico.* Vale allora la diseguaglianza

$$\boxed{F_s \leq \mu_s N}$$

Detto allora β l'angolo formato dai vettori $\vec{N}$ e$\vec{R}$, si ha (vedi fig.) $\frac{\mathrm{F_s}}{\mathrm{N}} = \tan\beta$, quindi $F_s \leq \mu_s N \Rightarrow \frac{\mathrm{F_s}}{\mathrm{N}} \leq \mu_s$ $\Rightarrow \tan\beta \leq \mu_s \Rightarrow \beta \leq \arctan\mu_s$, donde posto $\beta_s = \arctan\mu_s$ l'angolo limite, deve aversi

$$\beta \leq \beta_s.$$

La superficie scabra può dunque sviluppare una reazione d'intensità comunque grande, ma all'interno di un



cono di semiapertura $\beta_s = \arctan\mu_s$, detto *cono di attrito statico.*

.Valgono le seguenti leggi empiriche di validità approssimata, supponendo l'area di contatto non troppo piccola (ad esempio lame o punte) e la forza normale alla superficie d'appoggio non troppo grande , tale da incurvare la superficie*:*

Leggi dell'attrito statico.

La forza di attrito statico tra due superfici ha intensità proporzionale all'intensità della forza normale tra le due superfici. Il coefficiente $\mu_s$di proporzionalità dipende dalla natura e dallo stato di levigatezza delle superfici ma, entro larghi limiti, è indipendente dall'area di contatto tra le due superfici.

Nell'attrito dinamico si ha che per la forza τ vale la disuguaglianza

$$\tau > \mu_s mg,$$

per cui la forza di attrito statico , avente massimo valore $F_s^{max} = \mu_s mg$, non equilibra τ e il corpo si muove. Poiché, nel moto su di un piano orizzontale, il peso è equilibrato dalla componente $\overrightarrow{N}$ della reazione vincolare,la forza risultante agente sul corpo in movimento è data da

$$\boxed{\vec{F} = \vec{\tau} - \overrightarrow{F_s^{max}}}.$$

Detta allora A l'accelerazione di tale forza, si ha:

$$mA = \tau - \mu_s mg \Rightarrow \boxed{A = \frac{\tau}{m} - \mu_s g}.$$

Sperimentalmente si ha che il moto del corpo è uniformemente accelerato con un'accelerazione a maggiore di A e minore di $\frac{\tau}{\mathrm{m}}$, ovvero risulta

$$\frac{\tau}{\mathrm{m}} - \mu_s g < a < \frac{\tau}{\mathrm{m}}.$$

Quindi, essendo l'accelerazione $\vec{a}$ limitata in modulo, essa si può apprezzabilmente ritenere costante, per cui anche la forza $\vec{F} = m\vec{a}$ che causa il moto deve esserlo; inoltre essa risulta indipendente dalla velocità del corpo.

Da queste considerazioni risulta lecita la posizione, $\boxed{a = \frac{\tau}{\mathrm{m}} - \mu_D g}$, dove μ_D è il coefficiente di attrito dinamico tale che

$$\mu_D < \mu_S$$

(ciò si evince da $\frac{\tau}{\mathrm{m}} - \mu_s g < a \Leftrightarrow \frac{\tau}{\mathrm{m}} - \mu_s g < \frac{\tau}{\mathrm{m}} - \mu_D g \Leftrightarrow \mu_D < \mu_S$).

Segue allora

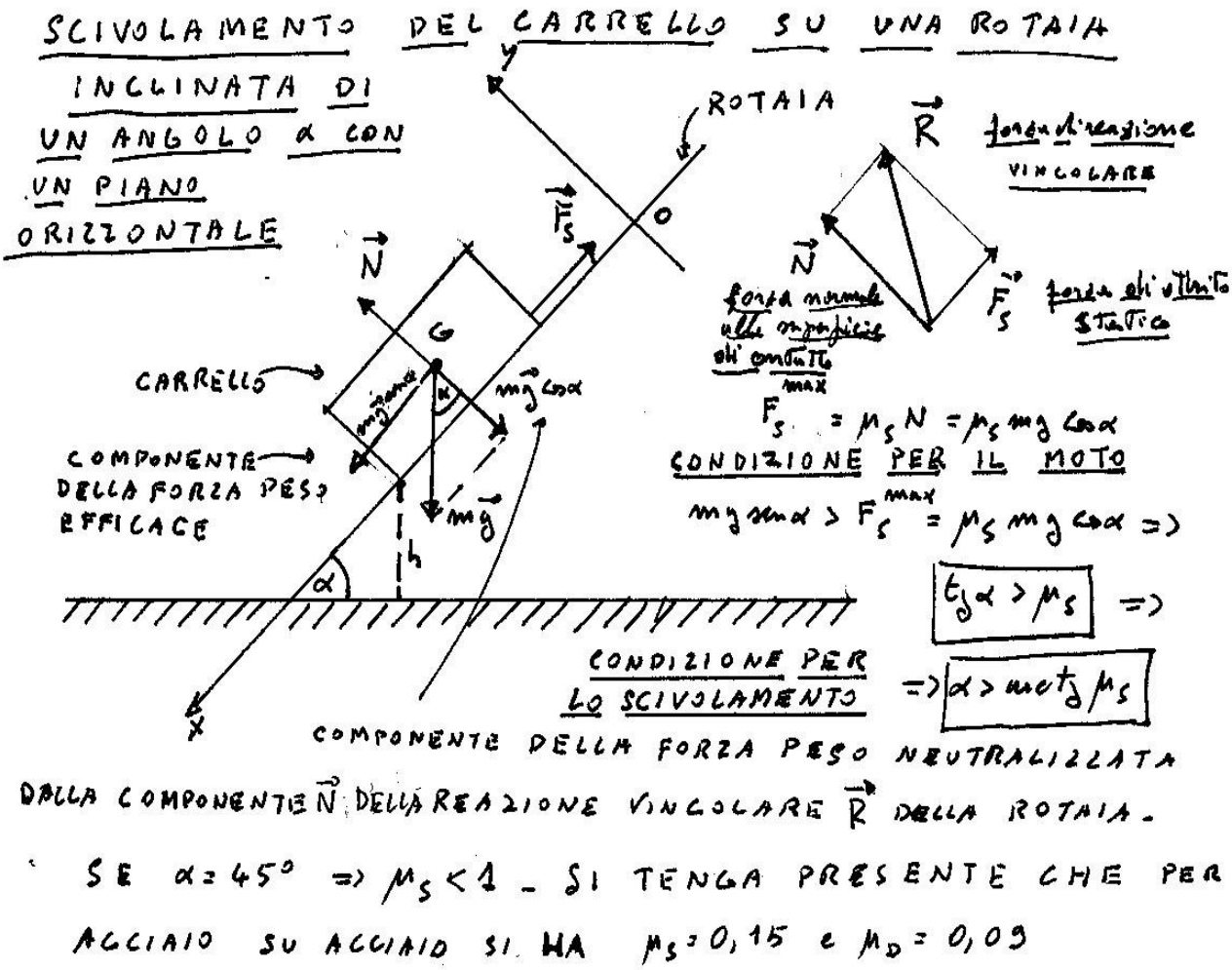
$$ma = \tau - \mu_D mg \Rightarrow F = \tau - F_D \text{ , con } F_D = \mu_D mg \qquad \textit{forza di attrito dinamico}.$$

Leggi dell'attrito dinamico

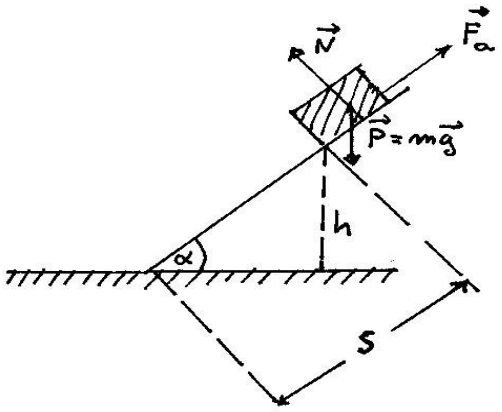
La forza di attrito dinamico tra due superfici ha la stessa direzione ma verso opposto a quello della velocità relativa delle due superfici ed intensità proporzionale all'intensità della forza normale tra le due superfici.

Il coefficiente μ_D di proporzionalità dipende dalla natura e dallo stato di levigatezza delle superfici, ma, entro larghi limiti, è indipendente dall'area di contatto e dal modulo della velocità relativa.

Condizione di scivolamento lungo un piano inclinato scabro



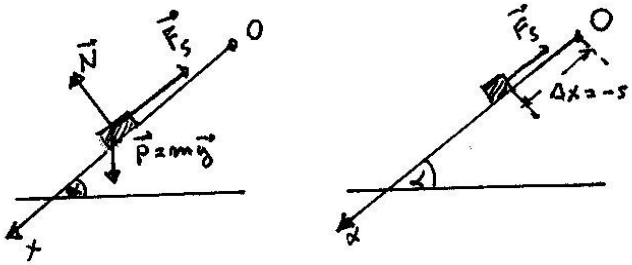
Supponiamo quindi di appoggiare un corpo di massa m e dimensioni trascurabili su un piano inclinato di un angolo α, inizialmente in quiete ad un'altezza h dal piano orizzontale e sia μ_D il coefficiente di attrito dinamico sia sul piano inclinato che sul piano orizzontale (vedi fig).



Le forze agenti sul corpo sono

$$:\begin{cases} \text{Il peso } \vec{P} \text{ di modulo } P = mg \\ \text{La reazione normale } \vec{N} \text{ di modulo } N = mg\cos\alpha \\ \text{La forza di attrito } \vec{F_a} \text{ di modulo } F_a = \mu_D N = \mu_D mg\cos\alpha \end{cases}$$

Ci proponiamo di determinare inizialmente la velocità v con la quale il corpo arriva alla base del piano inclinato.



Si ha, per il teorema dell'energia cinetica, che il lavoro compiuto dalla risultante delle forze agenti è uguale alla variazione del' energia cinetica del corpo, deve aversi cioè $L_{tot} = \Delta E_c$.

Poiché il corpo parte da fermo deve essere

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2,$$

mentre

$$L_{tot} = L_P + L_a + L_N,$$

dove L_P è il lavoro fatto dalla forza peso, L_a quello fatto dalla forza di attrito, L_N quello fatto dalla reazione normale. Si ha che $L_N = 0$ essendo la reazione $\vec{N}$ perpendicolare allo spostamento, da cui il lavoro totale si riduce a

$$L_{tot} = L_P + L_a.$$

Di questi due lavori il primo si calcola immediatamente, in quanto la forza peso è conservativa e si ha

$$L_P = -\Delta E_P = mgh = mgsin\,\alpha,$$

essendo ΔE_P l'energia potenziale gravitazionale.

Il secondo lavoro si deve calcolare esplicitamente in quanto la forza d'attrito non è conservativa dipendendo sia per la direzione che per il verso dalla velocità. Il lavoro elementare è dato da

$$dL_a = \overrightarrow{F_a} \cdot d\vec{x} = F_a dx \cos 180° = -F_a dx \,,$$

da cui integrando da $-s$ (punto iniziale) a 0 (punto finale) sull'asse orientato x, segue

$$L_a = \int_{-s}^{0} -F_a dx = -\mu_D\, mg\cos\alpha \int_{-s}^{0} dx = -\mu_D\, mg\cos\alpha(0-(-s) = -\mu_D\, mg\, \cos\alpha\, s.$$

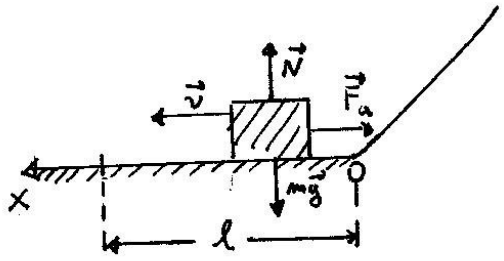
Allora il lavoro totale è dato da $L_{tot} = L_P + L_a = mg\sin\alpha - \mu_D\, mg\cos\alpha\ s = mgs(\sin\alpha - \mu_D\ \cos\alpha)$, donde $\frac{1}{2}mv^2 = mgs(\sin\alpha - \mu_D\ \cos\alpha) \Rightarrow\ v = \sqrt{2gs(\sin\alpha - \mu_D\ \cos\alpha)}$.

Da tale espressione si deduce che per avere effettivamente il moto occorre che $\sin\alpha - \mu_D\ \cos\alpha > 0$ $\Rightarrow \mu_D\ < \tan\alpha \Rightarrow \alpha > arc\tan\mu_D$. Ad esempio se $\alpha = 45°$, allora affinché ci sia il moto deve essere $\mu_D\ < 1$.

Vogliamo ora calcolare la distanza percorsa dal corpo sul piano orizzontale prima di fermarsi, supponendo che il raccordo tra piano inclinato e piano orizzontale sia un profilo curvo privo di spigoli.

Sul piano orizzontale la forza peso è equilibrata dalla reazione vincolare del piano $\vec{N}$ avente modulo $N = mg$, mentre la forza di attrito dinamico $F_a = \mu_D N = \mu_D mg$ provoca un progressivo rallentamento del corpo fino al suo arresto, per cui la variazione di energia cinetica è $\Delta E_c = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$. Per il teorema dell'energia cinetica si ha: $L_{tot} = L_a = \Delta E_c \Rightarrow L_a = -\frac{1}{2}mv^2$.

Ma il lavoro della forza di attrito è



$L_a == \int_0^l \overrightarrow{F_a} \cdot d\vec{x} = \int_0^l (\mu_D mgdx\cos 180°) = \int_0^l -\mu_D mgdx = -\mu_D mg\int_0^l dx = -\mu_D mgl,$

da cui si trae $-\frac{1}{2}mv^2 = -\mu_D mgl \Rightarrow$ lo spazio percorso prima di fermarsi è

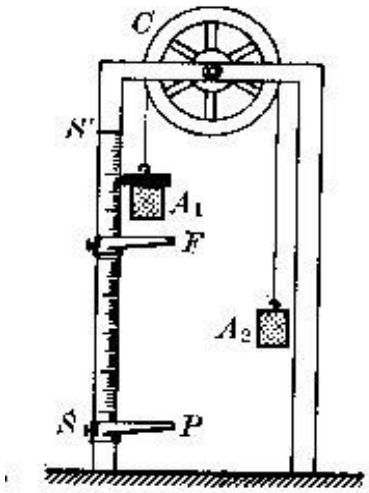
$$l = \frac{v^2}{2\mu_D g} = \frac{2gs(\sin\alpha - \mu_D\ \cos\alpha)}{2\mu_D g} = \frac{s}{\mu_D}\left(\sin\alpha - \mu_D\ \cos\alpha\right)$$

.Si noti che l'energia meccanica totale non si conserva a causa del fatto che il lavoro della forza di attrito, che non è conservativa, equvale ad energia meccanica dissipata.

Macchina di Atwood .

La macchina presenta alla sua sommità una carrucola costituita da una ruota rigida girevole C intorno ad un asse centrale che presenta una scanalatura, detta gola, nella quale passa un filo di seta.

La ruota è sostenuta da una staffa imperniata all'asse .



Ai capi della fune sono appesi due corpi A_1 e A_2 aventi uguali masse $m_1 = m_2 = m$. In tale situazione i corpi restano fermi in quanto sono uguali i momenti delle due forze peso $\overrightarrow{P_1} = m_1\vec{g}$ e $\overrightarrow{P_2} = m_2\vec{g}$ rispetto all'asse della carrucola.

Si ha infatti $M_1 = P_1 r = P_2 r = M_2$, essendo r il raggio della ruota. Non ci sono quindi rotazioni.

A questo punto se poniamo una lastrina di massa M su A_1, tale corpo cade verso il basso mentre A_2 sale verso l'alto, inoltre il moto dei due corpi avviene con un'accelerazione costante incognita a. Ciò si può verificare misurando gli spazi percorsi lungo la scala millimetrata SS' in vari intervalli di tempo.

La funzione dell'anello spostabile F consiste nel lasciare passare il corpo A_1 , trattenendo la lastrina, cosicché da quell'istante in poi il moto dei corpi diviene uniforme. Più in basso c'è un piatto P contro il quale va ad urtare il corpo A_1; il rumore prodotto segnala l'istante di arrivo e da questo si risale facilmente all'accelerazione a.

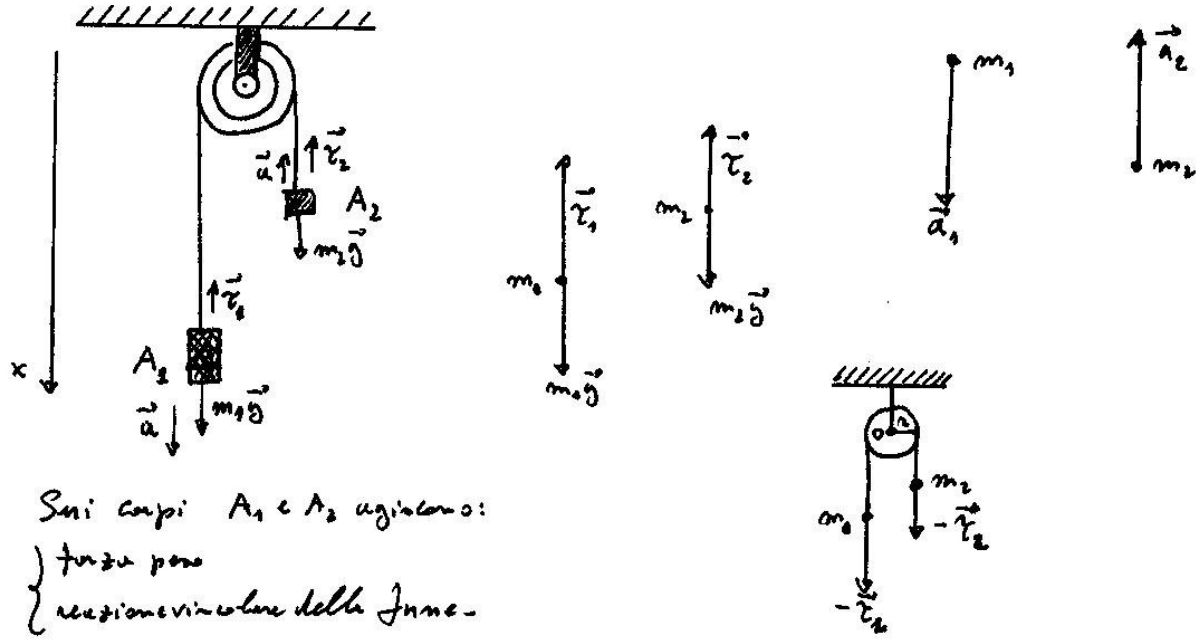
Noti a e i valori delle masse in gioco, si ricava l'accelerazione di gravità dalla formula,

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{M}}{2\mathrm{m} + \mathrm{M}}\mathrm{g}$$

ovvero

$$\boxed{\mathrm{g} = \frac{2\mathrm{m} + \mathrm{M}}{\mathrm{M}}\mathrm{a}}$$

Ci ricaviamo ora la formula considerando il seguente schema:



Essendo la fune inestensibile, la distanza tra A_1e A_2 rimane costante; ciò comporta che le accelerazioni $\overrightarrow{a_1}$ e $\overrightarrow{a_2}$ dei corpi A_1e A_2 devono avere uguale modulo e versi opposti per cui $\begin{cases} |\overrightarrow{a_1}| = |\overrightarrow{a_2}| = a \\ a_1 = -a_2 \end{cases}$, dove l'accelerazione $\overrightarrow{a_1}$ del corpo A_1 di massa m_1, maggiore della massa $m_2$del corpo A_2, è diretta verso il basso, mentre l'accelerazione $\overrightarrow{a_2}$ del corpo A_2è diretta verso l'alto. Le equazioni vettoriali del moto sono

$$\begin{cases} m_1\overrightarrow{a_1} = m_1\vec{g} + \overrightarrow{\tau_1} \\ m_2\overrightarrow{a_2} = m_2\vec{g} + \overrightarrow{\tau_2} \end{cases}$$

Da un'analisi delle reazioni vincolari $\overrightarrow{\tau_1}$ e $\overrightarrow{\tau_2}$ si evince che, per la legge di azione e reazione, ai due capi della fune sono applicate due forze $-\overrightarrow{\tau_1}$ e $-\overrightarrow{\tau_2}$ (vedi figura).

Poiché supponiamo che la carrucola abbia massa trascurabile (e quindi inerzia trascurabile),le due forze devono avere uguale modulo $|\overrightarrow{\tau_1}| = |\overrightarrow{\tau_2}| = \tau$, per cui i momenti $\overrightarrow{M_1}$ e $\overrightarrow{M_2}$ di esse rispetto all'asse della carrucola sono uguali e opposti, cioè $M_1 = -M_2 \Rightarrow M_1 + M_2 = 0$, che è la condizione di equilibrio rispetto alle reazioni vincolari.

Proiettando le equazioni del moto rispetto ad un asse x orientato verso il basso, con $\vec{\imath}$ versore dell'asse,si ha:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{\tau} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m_1\vec{a}\cdot\vec{\imath} = m_1\vec{g}\cdot\vec{\imath} + \vec{\tau}\cdot\vec{\imath} \\ m_2\vec{a}\cdot\vec{\imath} = m_2\vec{g}\cdot\vec{\imath} + \vec{\tau}\cdot\vec{\imath} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} m_1\,\mathrm{acos}\,0 = m_1 g cos\ 0 + \tau\cos 180° \\ m_2\,\mathrm{acos}\,180° = m_2 g cos\ 0 + \tau\cos 180° \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - \tau \\ -m_2 a = m_2 g - \tau \end{cases}$$

Da cui sottraendo membro a membro dalla prima equazione la seconda, segue

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g \Rightarrow$$

$$\mathrm{a} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathrm{g}$$

da cui

$$\boxed{g = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}a}$$

La tensione sul filo è data da

$$\tau = m_1 g - m_1 a = m_1 g - m_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathrm{g} = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathrm{g} \Rightarrow$$

$$\boxed{\tau = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathrm{g}}$$

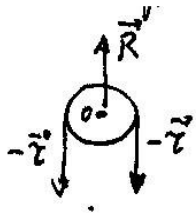
Si ha inoltre $\begin{cases} -m_2 a = m_2 g - \tau \Rightarrow m_2 g = \tau - m_2 a < \tau \\ m_1 a = m_1 g - \tau \Rightarrow \tau = m_1 g - m_1 a < m_1 g \end{cases} \Rightarrow m_2 g < \tau < m_1 g$,

cioè il modulo della tensione sul filo è compreso tra il peso del corpo avente massa minore e il peso di quello avente massa maggiore.

Calcoliamo infine la sollecitazione che il sostegno orizzontale superiore della carrucola deve sopportare.

Poiché l'asse O della carrucola è in equilibrio, deve aversi $\vec{R} - 2\vec{\tau} = 0 \Rightarrow$

$$R = 2\tau = 4\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\mathrm{g}\,,$$



che è lo sforzo esercitato sul sostegno superiore della carrucola

Dalle equazioni del moto si ricava che:

$$\begin{cases} \tau = m_1 g - m_1 a \\ \tau = m_2 g + m_2 a \end{cases} \Rightarrow R = 2\tau = m_1 g + m_2 g - (m_1 - m_2)a \Rightarrow$$

$$R < m_1 g + m_2 g,$$

per cui la sollecitazione R è minore della somma dei due pesi.

Possiamo adesso ritornare alla macchina di Atwood.

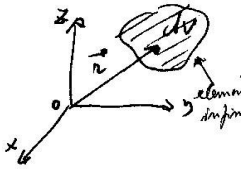
Ponendo $m_2 = m$ e $m_1 = m + M$ nell'equazione $\mathrm{a} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\mathrm{g}$, si ha

$$\mathrm{a} = \frac{m + M - m}{m + M + m}\mathrm{g} = \frac{\mathrm{M}}{2\mathrm{m} + \mathrm{M}}\mathrm{g}$$

che è la formula di pag.9 che volevamo provare.

Riferendoci allo schema di pag.12, ci proponiamo di determinare la velocità raggiunta dal corpo di massa m_1 a un determinato istante t_0 , supponendo che la carrucola abbia una determinata massa e quindi una certa inerzia. Per fare ciò dobbiamo prima calcolare il momento d'inerzia della carrucola. E' opportuno allora per la comprensione di quello che diremo, dare dei cenni di meccanica rotazionale, rimandando il lettore a dei testi specialistici per ogni tipo di approfondimento. Sono fondamentali i seguenti concetti:

- **Densità** (massa volumica).



Detta dM la massa dell'elemento infinitesimo di un corpo di massa M, dV il volume infinitesimo relativo al volume V dello stesso corpo, quindi sia $\vec{r}$ (vettore posizione) il raggio vettore avente origine O in un sistema di assi cartesiani Oxyz e cima individuante l'elemento di volume dV, si definisce come densità la funzione seguente di variabile vettoriale (il raggio vettore $\vec{r}$)

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{dV}}$$

Il che implica $M = \int_V \rho(\vec{r})dV$, essendo l'integrale esteso a tutto il volume V del corpo.

Se il corpo è omogeneo, per cui la densità è costante, si ha

$$M = \int_V \rho dV = \rho \int_V dV = \rho V \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Ottenendo la consueta definizione di densità come rapporto tra massa e volume del corpo.

Baricentro (centro di massa)

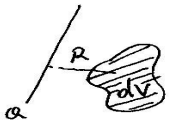
E' quel punto dello spazio (appartenente o non appartenente al corpo) individuato dal vettore posizione

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \rho\vec{r}\mathrm{dV}}{\int_V \rho\mathrm{dV}} = \frac{\int_V \rho\vec{r}\mathrm{dV}}{\int_V \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{dV}}\mathrm{dV}} = \frac{1}{\mathrm{M}}\int_V \rho\vec{r}\mathrm{dV}$$

Se il corpo è omogeneo si ha;

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int_V \rho\vec{r}dV = \frac{\rho}{M}\int_V \vec{r}dV = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}dV$$

Momento d'inerzia

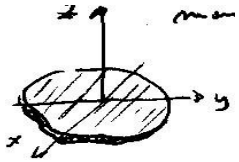
Dato un corpo C  di massa M e volume V e un asse a, detta $R(x, y, z)$ la distanza variabile dell'elemento infinitesimo di massa dM e volume $dV = dxdydz$ dall'asse a rispetto ad un sistema cartesiano $Oxyz$, si definisce momento elementare d'inerzia la quantità infinitesima $dI = R^2 dM = R^2 \rho dV$. Integrando questa rispetto al volume V, si

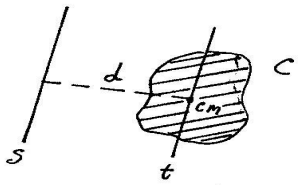
definisce come *momento d'inerzia* di C lo scalare (che è una grandezza caratteristica del corpo)

$$I = \int_V R^2 \rho dV$$

Se il corpo è omogeneo, allora essendo ρ costante, si ha

$$I = \rho \int_V R^2 dV$$

Nel S.I. il momento d'inerzia si misura in $kg \times m^2$. Nel caso particolare di una lamina sottile e un sistema di assi ortogonale disposto come in figura,  .detti rispettivamente I_z, I_x, I_y i momenti d'inerzia rispetto agli assi z,x,y, si ha la relazione $I_z = I_x + I_y$

Dato un corpo rigido C di massa M, quindi due assi s e t, il primo generico, il secondo parallelo al primo e passante per il baricentro CM di C , distante d da s, detti I il momento d'inerzia di C rispetto a s, I_{CM} il momento d'inerzia di C rispetto all'asse t, vale la seguente notevole relazione (teorema di Steiner): $I = I_{CM} + Md^2$ 

Momento angolare (momento della quantità di moto)

Consideriamo un corpo rigido C che ruota attorno ad un asse fisso z in un sistema di riferimento inerziale. Il moto rotatorio è descritto dal vettore velocità angolare $\vec{\omega}$.

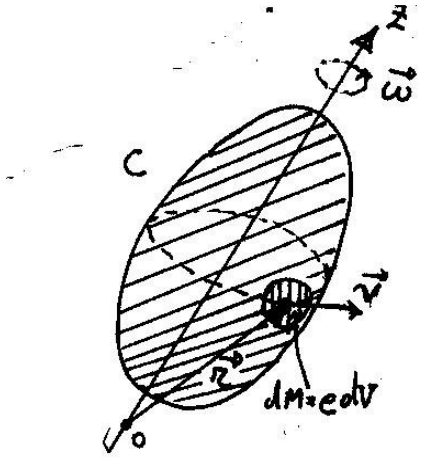
Direzione, punto di applicazione e verso di $\vec{\omega}$ individuano l'asse e il verso di rotazione. Il modulo ω è la velocità scalare angolare di rotazione.

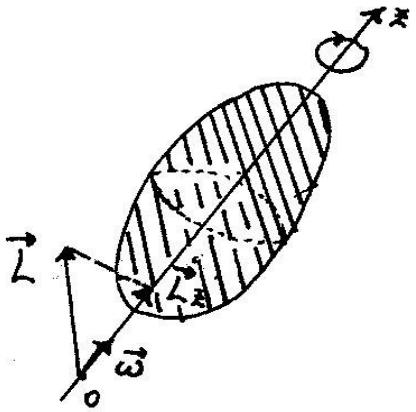
Considerato il momento angolare elementare dato dal prodotto vettoriale $d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}dM = \vec{r} \times \vec{v}\rho dV$, dove dM è la massa infinitesima, $\rho = \rho(x, y, z)$ la densità locale, $\vec{r}$ il vettore posizione relativo al punto O detto polo, $\vec{v}$ è la velocità dell'elemento di volume dV, Il

vettore momento angolare o anche momento della quantità di moto, di un corpo rigido rispetto a un prefissato punto O ,è definito dall'integrale

$$\vec{L} = \int_V \vec{r} \times \vec{v}\rho dV$$

In generale, anche se il polo sta sull'asse di rotazione, il vettore momento angolare $\vec{L}$ non è diretto lungo l'asse di rotazione z. Detta però $\vec{L}_z$ la componente di $\vec{L}$ nella direzione dell'asse z, vale la relazione $\overrightarrow{L_z} = I\vec{\omega}$, dove I è il momento d'inerzia del corpo rispetto

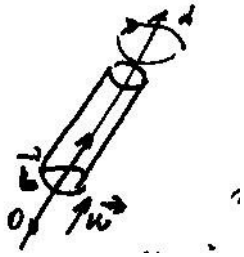




all'asse z.

Si può dimostrare che per ogni corpo, qualunque sia la sua forma, esistono (almeno) tre direzioni tra loro perpendicolari con la proprietà che, quando l'asse di rotazione coincide con una di queste direzioni, ed O è un punto qualunque dell'asse, $\vec{L}$ risulta parallelo all'asse. Queste direzioni vengono chiamate *assi principali d'inerzia* e i momenti rispetto ad essi prendono il nome *di momenti principali d'inerzia.* Se un corpo possiede qualche simmetria, gli assi principali d'inerzia coincidono con alcuni assi di simmetria.

Quindi se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia, allora il vettore $\vec{L}$ ha la direzione



dell'asse di rotazione da cui $\mathrm{L} = \mathrm{L_z}$ e vale la relazione $\vec{L} = I\vec{\omega}$

Gli assi di simmetria geometrica dei corpi rigidi omogenei sono assi principali d'inerzia.

Si dimostra comunque che ogni corpo rigido ha almeno tre assi principali d'inerzia passanti per il proprio baricentro CM.

Equazione del moto

Se $\overrightarrow{M_0}$ è il momento risultante delle forze applicate al corpo calcolato rispetto allo stesso polo O del momento angolare $\overrightarrow{L_O}$, , come conseguenza della legge fondamentale della Dinamica si ha

$$\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \overrightarrow{M_0}$$

cioè la variazione istantanea del momento angolare è uguale al momento risultante delle forze applicate al corpo. In particolare, se la rotazione avviene intorno ad un asse principale d'inerzia z, si ha:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \Rightarrow \frac{d}{dt}(I\omega) = \frac{dI}{dt}\omega + I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt}\omega + I\alpha = M_z,$$

dove α è l'accelerazione angolare.

Da quest'ultima relazione, se il corpo è rigido per cui $I = cost \Rightarrow \frac{dI}{dt} = 0$, si ottiene la notevole relazione

$$M_z = I\alpha$$

che indica come in un corpo rigido, la componente secondo l'asse di rotazione z del momento delle forze applicate sia uguale al prodotto tra il momento d'inerzia e l'accelerazione angolare.

Legge di conservazione del momento angolare

Dall'equazione del moto

$$\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \overrightarrow{M_0}$$

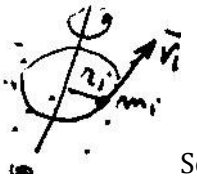
Nel caso che $\overrightarrow{M_0} = 0$ si ha che $\overrightarrow{L_0} = cost$, quindi, se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia, deve aversi necessariamente $I\vec{\omega} = cost$ e viceversa. Ne consegue che per un corpo rigido girevole attorno ad un asse fisso, il momento angolare è costante se e solo se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia. Se l'asse di rotazione non è un asse principale d'inerzia, la rotazione richiede sempre l'applicazione di forze esterne con $\overrightarrow{M_0} \neq 0$.

Energia

Considerato un corpo rigido formato da n punti materiali, l'energia cinetica totale è data da

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

dove $v_i = \omega r_i$ è la velocità scalare del punto i-mo distante r_i dall'asse di rotazione z.



Sostituendo nella relazione sopra, si ha:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove I è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse considerato, costante nel tempo perché, essendo il corpo rigido, le distanze dei punti dall'asse di rotazione rimangono inalterate.

Se il corpo rigido C è continuo, gli integrali prendono il posto delle sommatorie e si ha:

$$E_c = \frac{1}{2}\int v^2 dm = \frac{1}{2}\int \omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2}\left(\int r^2 dm\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

con $I = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho(V)\, dV$ momento d'inerzia e r distanza dall'asse dell'elemento infinitesimo avente massa $dm = \rho dV$ e volume $dV = dxdydz$.

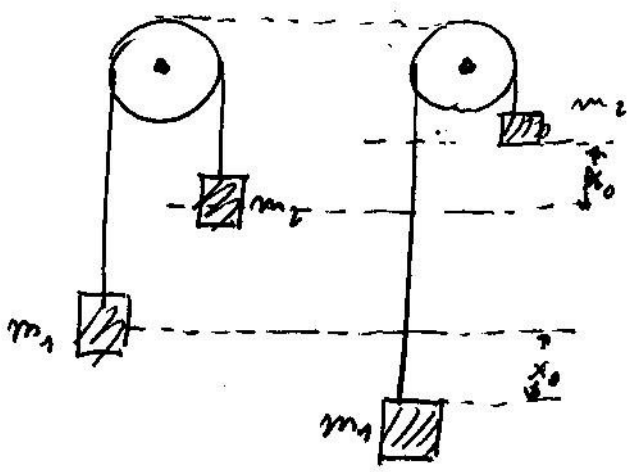
Nel caso di corpo omogeneo, essendo costante la densità, si ha $I = \rho \int r^2 dV$.

E' utile la seguente tabella che mostra le analogie tra moto traslatorio rettilineo e moto rotatorio attorno ad un asse fisso.

Moto traslatorio rettilineo	✧	**Moto rotatorio attorno ad un asse fisso**	✧
Spostamento lungo la traiettoria	Δs	Spostamento angolare	$\Delta\theta$

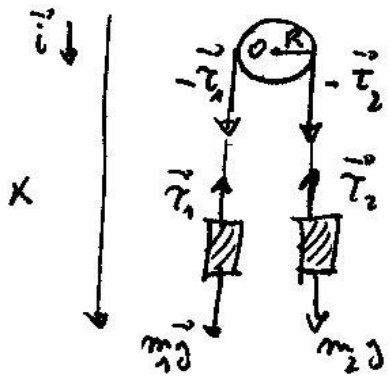
velocità	$v = \frac{ds}{dt}$	Velocità angolare	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Accelerazione	$a = \frac{dv}{dt}$	Accelerazione angolare	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Massa	m	Momento d'inerzia	I
Forza	$F = ma$	Momento delle forze	$M_z = I\alpha$
Lavoro	$W = \int F ds$	Lavoro	$W = \int M_z d\theta$
Potenza	$\frac{dW}{dt} = F\frac{ds}{dt} = Fv$	Potenza	$M_z\omega$
Energia cinetica	$\frac{1}{2}\mathrm{m}v^2$	Energia cinetica	$\frac{1}{2}I\omega^2$
Quantità di moto	mv	Momento della quantità di moto	$I\omega$

Come anticipato a pag.14 calcoliamoci il momento d'inerzia di una carrucola d raggio R rispetto al suo asse di rotazione.



Considerando la fune inestensibile e gli attriti trascurabili, siano le masse dei corpi appesi $m_1 > m_2$. Il corpo più pesante di massa m_1, lasciato libero, cade per un'altezza x_0 nel tempo t_0.

La carrucola è un corpo rigido girevole intorno al suo asse di simmetria, che è quindi asse principale d'inerzia; essa è soggetta ai momenti delle forze $-\vec{\tau}_1$ e $-\vec{\tau}_2$ esercitate dalla fune nei



punti in cui la fune si stacca dalla carrucola. Dall'equazione del moto, considerando il corpo rigido per cui il momento d'inerzia è costante, detto $\overrightarrow{M_0}$ il momento risultante delle forze applicate al corpo rispetto al polo O dell'asse di rotazione, uguale a quello del calcolo di $\vec{L}_0$, , si ha, essendo $\vec{\alpha}$ è l'accelerazione angolare, $\overrightarrow{M_0^{(1)}}$ il momento della forza $-\vec{\tau}_1$ rispetto al polo O sull'asse di rotazione della carrucola, $\overrightarrow{M_0^{(2)}}$il momento della forza $-\vec{\tau}_2$ rispetto al polo O sull'asse di rotazione della carrucola, momenti che hanno la direzione di tale asse e verso opposto,

$$\begin{cases} \overrightarrow{M_0} = \dfrac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \dfrac{dI}{dt}\vec{\omega} + I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} \\ \overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{M_0^{(1)}} + \overrightarrow{M_0^{(2)}} \end{cases} \Rightarrow I\vec{\alpha} = \overrightarrow{M_0^{(1)}} + \overrightarrow{M_0^{(2)}}$$

Considerando le componenti di tale vettore lungo l'asse orientato x di versore $\vec{\imath}$, proiettando tale equazione , si ha:

$$(I\vec{\alpha}) \cdot \vec{\imath} = \left(\overrightarrow{M_0^{(1)}} + \overrightarrow{M_0^{(2)}}\right) \cdot \vec{\imath} \Rightarrow I\vec{\alpha} \cdot \vec{\imath} = \overrightarrow{M_0^{(1)}} \cdot \vec{\imath} + \overrightarrow{M_0^{(2)}} \cdot \vec{\imath} \Rightarrow I\alpha \cos 0 = \tau_1 R \cos 0 + \tau_2 R \cos 180°$$

$\Rightarrow$

$$I\alpha = \tau_1 R - \tau_2 R$$

Osservato che la fune è inestensibile, necessariamente i corpi si devono muovere con la stessa accelerazione, per cui si ha $\begin{cases} |\overrightarrow{a_1}| = |\overrightarrow{a_2}| = a \\ \overrightarrow{a_1} = -\overrightarrow{a_2} \end{cases}$. Inoltre, poiché la fune non slitta sulla carrucola, si ha: $v = \omega R \Rightarrow \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}} R \Rightarrow a = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a}{\mathrm{R}}$ dove a è l'accelerazione lineare dei corpi e α l'accelerazione della carrucola. Proiettando sull'asse x le equazioni vettoriali, si ottiene: $\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \overrightarrow{\tau_1} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{\tau}_2 \\ I\vec{\alpha} = \overrightarrow{M_0^{(1)}} + \overrightarrow{M_0^{(2)}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 a = m_1 g - \tau_1 \\ -m_2 a = m_2 g - \tau_2 \\ I\alpha = \tau_1 R - \tau_2 R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 a = m_1 g - \tau_1 \\ -m_2 a = m_2 g - \tau_2 \\ I\frac{a}{\mathrm{R}} = (\tau_1 - \tau_2)\mathrm{R} \end{cases}$ che è un sistema lineare nelle quattro incognite a, I, τ_1, τ_2. Si ha: $\begin{cases} \tau_1 = m_1 g - m_1 a \\ \tau_2 = m_2 g + m_2 a \\ I = (\tau_1 - \tau_2)\frac{\mathrm{R}^2}{a} \end{cases} \Rightarrow$

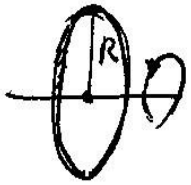
$$I = \left[(m_1 - \mathrm{m}_2)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{a}} - (m_1 + m_2)\right]\mathrm{R}^2$$

Ora il moto del corpo m_1 è naturalmente accelerato con accelerazione a, per cui deve aversi

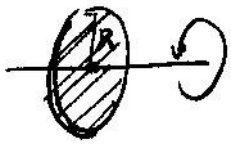
$x_0 = \frac{1}{2}at_0^2 \Rightarrow a = \frac{2\mathrm{x}_0}{\mathrm{t}_0^2}$ donde infine otteniamo l'espressione cercata del momento d'inerzia

$$I = \left[(m_1 - \mathrm{m}_2)\frac{\mathrm{g}}{2\mathrm{x}_0}\mathrm{t}_0^2 - (m_1 + m_2)\right]\mathrm{R}^2$$

Nel caso di un anello sottile ruotante attorno all'asse passante per il centro, si ha



$\mathrm{I} = \mathrm{MR}^2$



Nel caso invece di un disco pieno si ha $\mathrm{I} = \frac{1}{2}\mathrm{MR}^2$

Come detto a pag.14, vogliamo determinare la velocità del corpo di masa m_1 all'istante t_0.

Il sistema meccanico è costituito dai due corpi di massa m_1 e m_2 e dalla carrucola.

Per il teorema delle forze vive deve aversi

$$\Delta E_c = L_{int} + L_{est}\ ,$$

dove $L_{int} = 0$ è il lavoro compiuto dalle forze interne (che è quindi nullo)e L_{est} è il lavoro fatto dalle forze esterne.

Ora, poiché le forze esterne si riducono alla sola gravità, che è una forza conservativa, detta ΔE_p la variazione dell'energia potenziale gravitazionale relativa allo spostamento x_0 nel tempo t_0 delle due masse m_1 e m_2 dei corpi , deve aversi

$$L_{est} = -\Delta E_p.\ ,\ \text{da cui}$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p.$$

Ma a sua volta $\Delta E_p = E_p^{(2)} - E_p^{(1)} = m_2 g x_0 - m_1 g x_0 = -(m_1 - m_2) g x_0$, donde

$$\Delta E_c = (m_1 - m_2) g x_0,$$

D'altra parte, essendo il corpo inizialmente fermo, la variazione totale di energiacinetica è data da (vedi pag.18)

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + I\omega^2)$$

Osservato allora che $v_1 = v_2 = v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$, sostituendo si ha

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}\left(m_1v^2 + m_2v^2 + I\frac{v^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2$$

Uguagliando con i'espressione di ΔE_c trovata a pag.21, si ha

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2 = (m_1 - m_2)gx_0,$$

da cui infine si ricava il valore della velocità

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gx_0}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}}$$